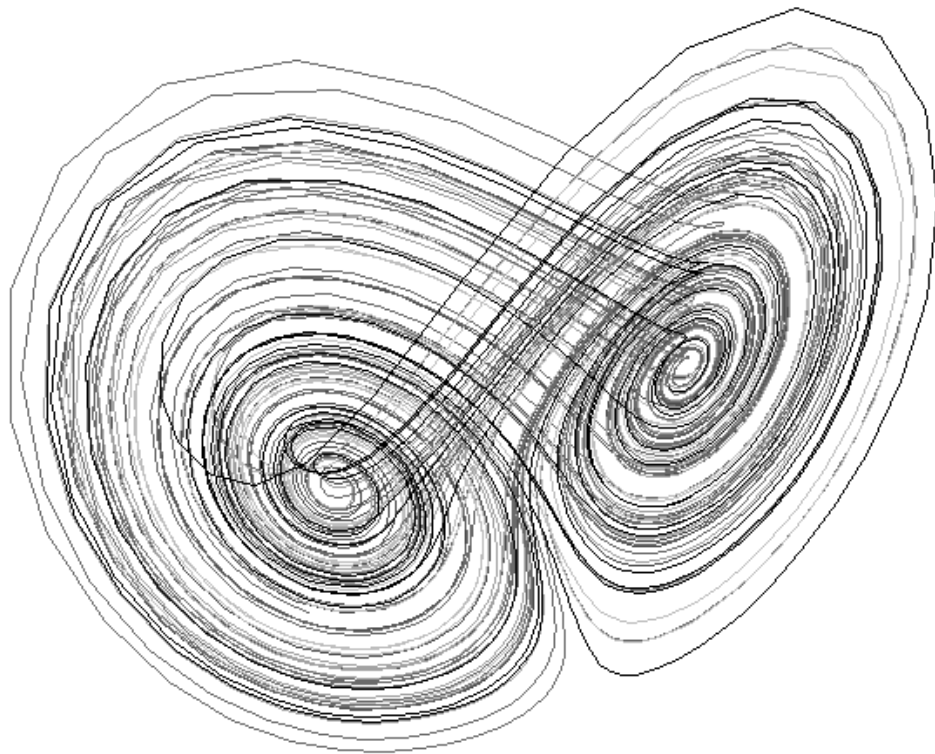


# LE CHAOS

du CLASSIQUE au QUANTIQUE

Eric POLIZZI\*

mai 1996



---

\*avec l'aide et la collaboration d'Armelle BARELLI (Maitre de conférences à l'UPS de TOULOUSE).

\*

\*\*\* L'illustration sur la page de garde est une représentation de l'attracteur de Lorenz .\*\*\*

# AVANT-PROPOS

Dans la première partie de ce rapport, on fera un large exposé sur le chaos déterministe en mécanique classique. Nous verrons comment le concept du chaos s'est imposé à la physique actuelle, ainsi que toutes les caractéristiques qui rendent un système dynamique chaotique. Nous nous attarderons tout particulièrement sur la notion d'attracteurs étranges et sur la dimension fractale de ces attracteurs, sans oublier de mentionner les différents types de bifurcations qui peuvent instaurer l'instabilité dans les systèmes dynamiques.

La seconde partie traite en exemple le rotateur pulsé. Celui-ci nous permettra d'une part de vérifier les propos avancés dans la première partie, avec de nombreux exemples numériques, d'autre part de montrer la difficulté de la notion de chaos en mécanique quantique. A cette partie est rattachée un logiciel appelé CHAOS, distribué sur PC.

\*

\*

# Table des matières

## Première Partie

<b>1-INTRODUCTION</b>	7
1.1 Sciences et Chaos	7
1.2 Oscillateurs	8
<b>2-Régimes dynamiques et Attracteurs</b>	13
<b>3-L'Avènement du CHAOS</b>	14
<b>4-Étranges ces ATTRACTEURS !</b>	15
4.1 Le Phénomène d'Attraction	15
4.2 L'étonnante SCI	16
4.3 Paradoxes	17
4.4 Conclusions	18
<b>5-Exemples d'Attracteurs Étrange</b>	19
5.1 L'Attracteur de Lorenz	19
5.2 L'Attracteur de Hénon	22
<b>6-Dimension d'un Attracteur</b>	25
6.1 Dimensions Fractales	25
6.2 Caractérisation géométrique	28
<b>7-En Route vers le CHAOS</b>	29
7.1 Différents Scénarios	29
7.2 La Quasi-Périodicité	31
7.3 La Cascade Sous-Harmonique	35
<b>8-Exposant de Lyapunov</b>	38
8.1 Description	38
8.2 Caractérisation d'un Attracteur	39

## Deuxième Partie

<b>1-Le Rotateur Pulsé Classique</b>	41
1.1 Le Modèle Standard de Chirikov	41
1.2 $K$ , Paramètre de Transition	43
1.3 Description Numérique	48
1.4 Calculs des Points Fixes	49
1.5 Stabilité des Points	49
<b>2-Le Rotateur Pulsé Quantique</b>	56
2.1 Quantification du Modèle Standard	56
2.2 L'Énergie Quantique	57
2.3 Description Numérique, la FFT	58
2.4 Différence Classique-Quantique	60
2.5 Caractérisation du Chaos Quantique	61
2.6 Conclusion	63

# Première partie

## De L'ORDRE au CHAOS

« Il est dans le grand ordre qu'il y ait un petit désordre »  
LEIBNITZ

### 1 INTRODUCTION

#### 1.1 Sciences et Chaos

En sciences, le chaos est l'art de former du complexe à partir du simple. Plus précisément une cause simple ne faisant intervenir que 3 variables peut conduire à des effets complexes.

**Exemple :** supposons un système composé d'un pendule simple décrit par 2 variables (position et vitesse angulaire) auquel on ajoute une troisième variable (on soulève périodiquement son extrémité supérieure), alors toutes prédictions sur le mouvement de ce système est devenue impossible.

Il est important de noter que si un système chaotique est imprévisible, son désordre lui, n'est qu'apparent, car le système est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. La signification du chaos réside en *une impossibilité pratique de calculer l'évolution de systèmes déterministes.*

Il nous faut maintenant définir un lien entre deux notions pour le moins paradoxales : le déterminisme et l'imprévisibilité, c'est la SCI (sensibilité aux conditions initiales) pour laquelle 2 conditions initiales quasiment semblables conduisent à des états très différents du système. *La SCI est la principale caractéristique des système chaotiques.*

On est en droit de se poser la question à savoir comment ne pas confondre un comportement chaotique avec un comportement purement aléatoire ?

Il faut pour cela tracer un diagramme dans l'espace des phases (ou des états) de dimension égale au nombre des variables mises en jeu dans le système. Dans cette représentation :

- un mouvement régulier correspond à un diagramme simple : un attracteur.
- si le mouvement est aléatoire les points représentatifs du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît.
- quand le mouvement est chaotique les points représentatifs paraissent à première vue aléatoire, mais si on observe suffisamment longtemps le système on constate que les points dessinent une forme particulière, de géométrie dite fractale : les attracteurs ainsi formés sont qualifiés d'étranges.

*L'attracteur étrange est la signature du chaos.*

On peut aussi identifier le chaos à sa manière d'entrer en scène, il existe 3 grands scénarios : la quasi-périodicité, la cascade sous-harmonique et l'intermittence. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces différents thèmes dans notre exposé.

Un des résultats très intéressants du chaos est que l'on peut tenter de définir une échéance de prévisibilité et donc mesurer la valeur de nos prédictions.

**Exemple :** en météorologie les prédictions concernant le temps sont, à l'heure actuelle, de l'ordre d'une semaine.

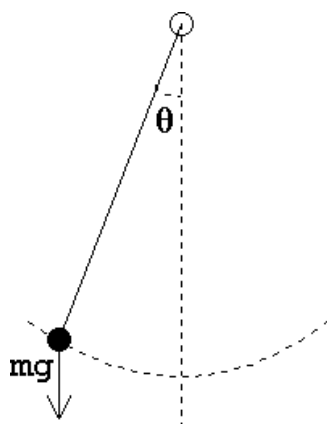
Le chaos est étudié dans de nombreux domaines de la PHYSIQUE et de la CHIMIE, mais le concept de chaos déterministe peut aussi bien s'appliquer en BIOLOGIE (irrégularités des battements cardiaques ...), en ECONOMIE et pourquoi pas en SOCIOLOGIE. Mais ces derniers domaines sont un peu effrayants d'ampleur et de complexité, aussi nous nous limiterons ici à notre bonne vieille PHYSIQUE.

Et pour commencer notre étude du chaos revenons sur la notion d'oscillations, notion essentielle à l'étude de l'évolution des systèmes dynamiques. Et cela pour deux raisons :

- la première est évidente, les phénomènes périodiques étant extrêmement répandus, l'étude est donc rendue indispensable en elle-même.
- deuxièmement, on sait qu'une évolution quelconque peut-être décomposée en une somme de contributions périodiques par le biais d'une transformation de Fourier (lumière blanche décomposée en diverses lumières colorées, son complexe décomposé en harmoniques de fréquences distinctes, ...). l'ensemble d'oscillateurs indépendants ainsi constitué reproduit le même comportement temporel que le système complexe. *Ces oscillateurs fictifs sont appelés modes.*

## 1.2 Les Oscillateurs

- **L'Oscillateur libre :** prenons l'exemple du pendule simple



il est facile d'établir l'équation du mouvement suivante ( $l$  étant la longueur du fil) :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1)$$



Dans le cas général l'intégration des équations différentielles est impossible, nous représenterons donc l'ensemble des solutions du système dans l'espace des phases. Les courbes ainsi tracées dans cet espace définiront les diverses évolutions du système au cours du temps.

Dans l'exemple traité l'énergie est une constante du mouvement et a pour expression :

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos \theta)$$

On représentera dans l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$  les lignes d'isoénergie du pendule (FIG-1).

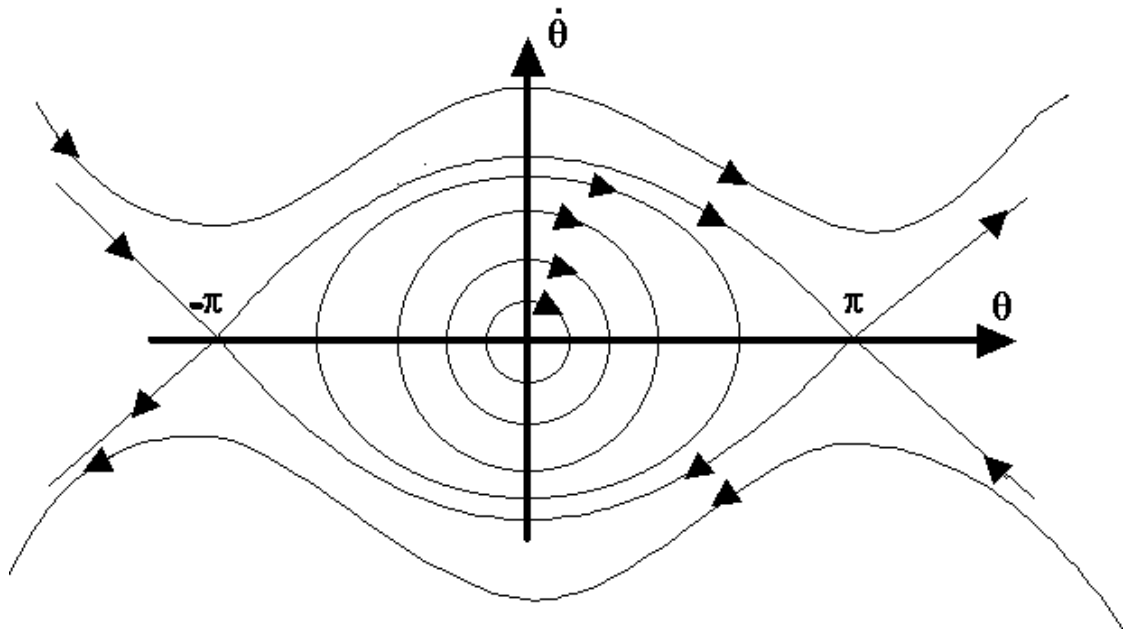


FIG.1-Portrait de phases du pendule simple.

L'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles entraînent que les orbites remplissent tout l'espace, et qu'elles ne se coupent pas entre elles. Pour un temps infini les courbes tendent vers les points  $\pi$  et  $-\pi$  (FIG-1), on les appelle des séparatrices.

L'invariance de l'énergie classe le pendule dans les systèmes qualifiés de conservatifs (ou Hamiltonien), tout système décrit par un Hamiltonien  $\mathcal{H}(q, p)$  indépendant du temps est dit conservatif. Soit  $(\delta q, \delta p)$  un domaine de l'espace des phases, on sait que l'évolution du système n'affectera pas l'aire de ce domaine. *On dit qu'un système conservatif conserve les aires dans l'espace des phases, de plus il est à dynamique réversible (invariance des équations par renversement du temps).*

- **L'Oscillateur amorti** : on tient compte des frottements dans le pendule simple.

L'amplitude des oscillations décroît au cours du temps, on en déduit la dissipation de l'énergie et on perd l'invariance par renversement du temps.

on va supposer un cas général,  $\gamma$  étant le coefficient d'amortissement et  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  (le carré de la pulsation), l'équation (1) devient dans l'approximation linéaire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \quad (2)$$

On va étudier l'évolution de l'énergie :

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2)$$

Par hypothèse on pose :  $1 - \cos \theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$  et en tenant compte de (2) on obtient :

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma\dot{\theta}^2 \quad \begin{cases} \text{énergie conservée} & \text{si } \gamma = 0 \\ \text{énergie décroît} & \text{si } \gamma > 0 \\ \text{énergie croît} & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$$

Nous allons tracer les trajectoires de l'énergie dans l'espace des phases pour différents cas de  $\gamma$ , et pour  $|\gamma| \ll \omega$  (FIG-2) :

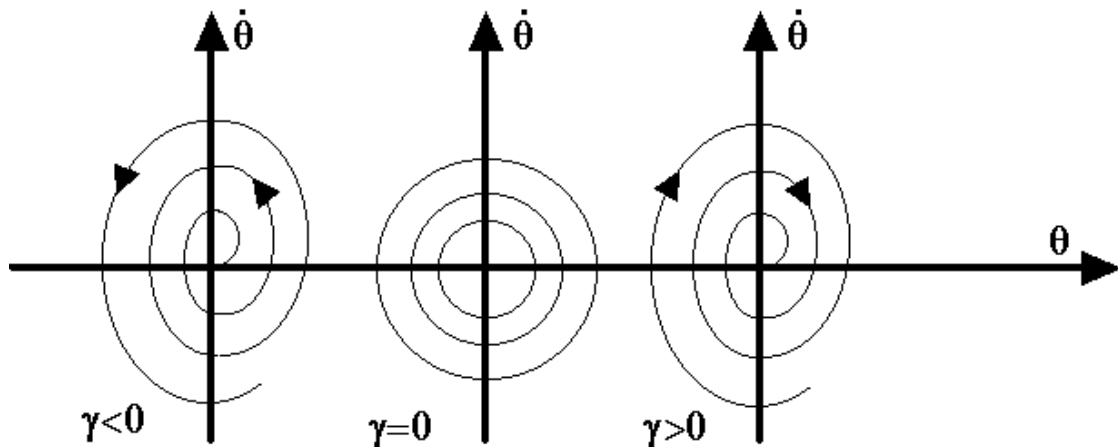


FIG.2-Portrait de phases de l'équation (2) au voisinage de l'origine.

Pour  $\gamma = 0$  on retrouve le pendule simple dans l'approximation linéaire.

Pour  $\gamma > 0$  ou  $< 0$  une seule trajectoire a été tracé afin de ne pas encombrer le dessin. Les trajectoires dans ces 2 cas sont des spirales, leurs sens laissent supposer que l'on a au point  $(0,0)$  un foyer instable pour  $\gamma < 0$  et un foyer stable pour  $\gamma > 0$ .

Le foyer stable en  $(0, 0)$  (pour  $\gamma > 0$ ) a pour effet de faire aboutir toutes les trajectoires sur l'origine, l'origine est ici un *point attracteur*. *Le point attracteur est le reflet d'une solution indépendante du temps.*

L'oscillateur amorti fait parti de la classe des système dissipatifs. Contrairement aux systèmes conservatifs, *la dynamique des système dissipatifs n'est pas réversible par renversement du temps et il n'y a pas conservation des aires dans l'espace des phases.*

• **L'Oscillateur entretenu :**

L'équation (2) doit être améliorée afin de répondre aux nombreux exemples d'oscillateurs présents dans la nature. On doit pour cela :

1. limiter l'augmentation de l'énergie pour  $\gamma < 0$  afin de redonner un sens physique au problème.
2. introduire un apport continu d'énergie compensant les pertes par amortissement lorsque  $\gamma > 0$ .
3. détruire l'invariance par dilatation, c'est à dire de faire en sorte que si  $\theta(t)$  solution de (2),  $\alpha\theta(t)$  (pour  $\alpha$  réel) ne soit pas aussi solution. Car il va de soi que l'on doit avoir des oscillations d'amplitude bien déterminée.

Van der POL proposa un moyen mathématique simple pour résoudre ces 3 problèmes, il est question de faire dépendre le coefficient de frottement  $\gamma$  de l'amplitude des oscillations  $\theta$ . Et l'on peut obtenir une expression simple :

$$\gamma(\theta) = -\gamma_0 \left[ 1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right]$$

Avec  $\gamma_0 > 0$  et  $\theta_0$  amplitude de référence.

En portant cette expression dans (2) il vient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \gamma_0 \left[ 1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right] \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \tag{3}$$

L'équation ainsi obtenue (3) décrit le comportement de l'oscillateur entretenu, avec croissance des oscillations de petite amplitude et décroissance des oscillations de grande amplitude.

L'espace des phases (FIG-3) fait apparaître un nouveau type d'attracteur, *un cycle limite*. Le cycle limite est une courbe fermée vers laquelle convergent toutes les trajectoires.

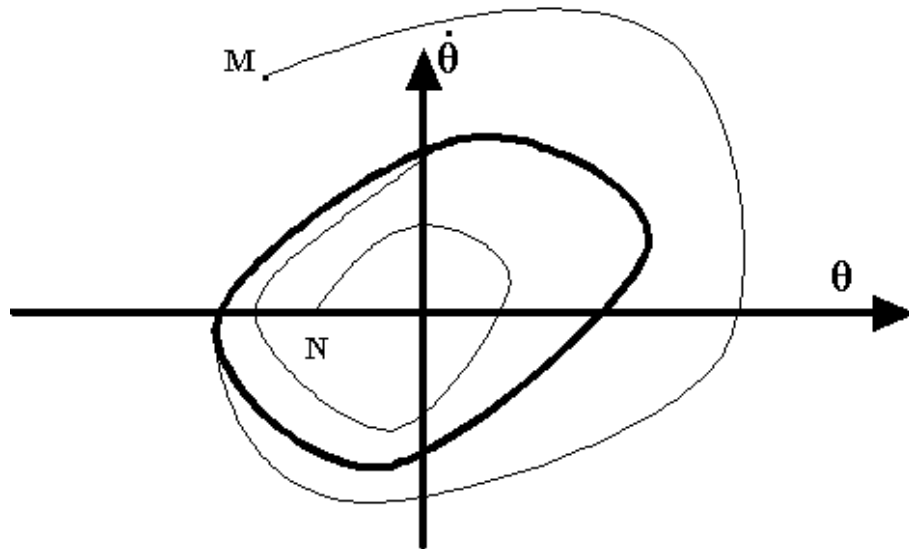


FIG.3-Portrait de phases de l'équation de Van der POL (3). On notera que les trajectoires issues des conditions initiales M et N (la première étant extérieure et la deuxième étant intérieure au cycle) convergent toutes deux vers le cycle limite.

Dans un cycle limite le comportement du système est périodique dans le temps. Leur(s) apparition(s) est(sont) liée(s) au caractère non linéaire des systèmes.

- **L'Oscillateur paramétrique :**

Maintenant un des paramètres du pendule dépend du temps, on dit que le système est non-autonome.

Si on soumet le pendule à un champ de pesanteur dépendant du temps, l'équation (1) devient (avec approximation linéaire) :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g(t)}{l}\theta = 0 \quad (4)$$

Cette équation (4) diffère de (1) car elle est non-intégrable pour  $g(t)$  quelconque. Son étude étant laborieuse et sans conséquence pour la suite, elle ne figurera pas dans cet exposé.

- **Conclusions :** Certains régimes dynamiques sont le résultat d'une superposition d'oscillations qui diffèrent par l'amplitude, la période, le taux d'harmonique...

L'attracteur associé n'est plus du type cycle limite, *c'est maintenant un tore*, le régime est qualifié de *quasi-périodique*.

## 2 Régimes dynamiques et Attracteurs

On s'intéresse au comportement à long terme des système dissipatifs. L'évolution de ces systèmes est supposée déterministe car elle décrite soit par un flot autonome continu,  $\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = F(\vec{X}(t))$ , soit par une application à temps discret,  $\vec{x}_{k+1} = f(\vec{x}_k)$ . Dans un volume fini de l'espace des phases, si le flot du système est dissipatif, les trajectoires convergent vers un attracteur qui lui est invariant par application du flot. Le but ultime de notre analyse est de comprendre la genèse et les caractéristiques de toutes les évolutions rencontrées, y compris celles qui paraissent totalement désordonnées.

Identifier un régime dynamique peut se faire de plusieurs manières. Il existe 2 méthodes fréquemment utilisées, la transformée de Fourier et les coupes ou sections de Poincaré. Nous sommes ainsi en mesure de reconnaître les solutions périodiques, des solutions quasi-périodique et des solutions apériodiques.

On va définir les différents types d'attracteurs et les différents types de régimes dynamiques, soit :

- le point attracteur qui est le reflet d'une solution indépendante du temps. Le système reste identique à lui-même.
- le cycle limite caractérisé par un comportement périodique dans le temps. On peut exprimer la solution du flot à l'aide d'une série de Fourier, si on connaît l'état du système à un instant déterminé, on est en mesure de prévoir son état à n'importe quel instant ultérieur. Dans ce cas le spectre de Fourier comporte une seule fréquence de base et, éventuellement, ses harmoniques.
- le tore  $T^r$  ( $r$  est le nombre de fréquences de base indépendantes et  $r \geq 2$ ) qui correspond à un régime quasi-périodique, là encore, comme précédemment le spectre de Fourier est constitué d'un ensemble de raies, dont les fréquences sont des combinaisons linéaires des fréquences fondamentales (pour  $r$  suffisamment élevé le spectre peut paraître continu). L'état du système demeure calculable à partir d'une condition initiale. Ces systèmes sont des systèmes ergodiques, l'attracteur occupe l'espace tout entier.

Il existe des régimes dynamiques de nature très difficile à saisir. Étant donné leur apparence complètement désordonnée, on les dit « *chaotique* », en tout état de cause il est impossible de discerner une quelconque régularité dans la série temporelle du système. On dira qu'un régime dynamique est chaotique si son spectre de puissance comporte une partie continue, une bande large, indépendamment de la présence éventuelle de quelques raies. La connaissance de l'état d'un système pendant un temps aussi long soit-il ne permet pas, pour autant, de prévoir ce que sera son évolution ultérieure. *Au fond cela revient à rendre imprévisible toutes évolutions chaotiques.*

On doit maintenant se poser la question suivante : quel attracteur est associé à un régime dont le spectre de Fourier comporte une bande large ?

### 3 L'Avènement du CHAOS

La représentation en modes des systèmes complexes constitue un paradigme, ou en d'autres termes, un modèle très utilisé par les scientifiques durant une époque.

Le physicien russe Landau, en 1944, avait pensé expliquer les mouvements irréguliers de la turbulence par la superposition d'un certain nombre d'oscillations périodiques.

L'attracteur d'un écoulement turbulent serait donc un tore  $T^r$  de dimension  $r$  suffisamment élevée. Le spectre de Fourier donnant l'illusion d'être continu. Cette hypothèse amène à penser que seuls les systèmes à grand nombre de degrés de liberté peuvent être le siège du chaos.

Aussi utile qu'il ait été, le paradigme des modes est trompeur. Considérons une évolution dans le temps d'un système dynamique, nous pouvons décrire cette évolution à l'aide d'un ensemble d'oscillateurs indépendants, et il est naturel de penser que cet ensemble serait fini. Cependant et hélas, le chaos n'apparaît pas dans l'évolution d'un oscillateur ou d'un ensemble fini d'oscillateurs : une petite erreur initiale demeure petite, la SCI (sensibilité aux conditions initiales) ne se manifeste pas. Cela signifie qu'une évolution chaotique dans le temps ne peut être représentée par un ensemble fini de modes. Ainsi, dans la majorité des cas, le paradigme des modes devra être remplacé par un autre, celui du chaos. On sait maintenant que la turbulence n'est pas une superposition d'oscillations périodiques.

C'est à Ruelle et Takens que revient le mérite d'avoir ouvert, en 1971, une voie nouvelle en rejetant la description en termes de modes de ce phénomène, et en introduisant à la place des attracteurs de nature topologique différente de celle du tore, dont ils donnèrent le nom « *d'attracteurs étranges* ». L'attracteur étrange signifie, en langage moderne, chaos, et ces propriétés sont surprenantes. La plus cruciale étant la SCI (sensibilité aux conditions initiales) qui rend impossible de prévoir le comportement des systèmes chaotiques.

Il est aussi important de signaler que contrairement aux conclusions que l'on pouvait tirer de l'interprétation de la turbulence en terme de modes, il apparaît que 3 degrés de liberté suffisent à un système pour donner naissance à un régime chaotique. On peut donc obtenir un chaos déterministe<sup>1</sup>, avec ce résultat peu banal : *l'impossibilité de prévoir le comportement de certains flots déterministes ayant seulement 3 degrés de liberté!*

Avant l'article de Ruelle et Takens, deux de ces attracteurs, caractérisés maintenant d'étranges, avait fait l'objet d'une publication. Celui de Rikitake en 1958, et celui de Lorenz en 1963, ce dernier fera l'objet d'une étude dans la suite de notre exposé.

---

<sup>1</sup>Une dynamique est dite déterministe si elle est représentable par un nombre limité d'équations différentielles non-linéaires couplées.

## 4 Étranges ces ATTRACTEURS !

### 4.1 Le Phénomène d'Attraction

Les systèmes dynamiques dissipatifs que l'on va considérer ici, sont caractérisés par l'attraction de toutes les trajectoires passant dans un certain domaine de l'espace des phases vers un objet géométrique nommé attracteur.

**Exemple :** en ce qui concerne le pendule entretenu, les trajectoires dans l'espace des phases s'effondrent sur un cycle limite  $\mathcal{C}$ . Si on écarte le système de cet état permanent, au cours du temps, la dissipation fait converger rapidement la trajectoire correspondante vers  $\mathcal{C}$  (voir FIG-3).

Si on généralise, on peut dire que dans l'espace des phases de dimension  $n$ , les trajectoires d'un ensemble de  $n$  équations différentielles ordinaires :  $\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = F(\vec{X}(t))$ , forment un flot  $\phi$  qui, dans le cas d'un système dissipatif, possède un attracteur  $\mathcal{A}$  ayant les propriétés suivantes :

- $\mathcal{A}$  est invariant par action du flot sur lui-même soit :  $\phi\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$ .
- $\mathcal{A}$  est de volume nul dans l'espace des phases de dimension  $n$  (explications plus en avant)
- $\mathcal{A}$  est inclus dans un certain domaine  $\mathcal{B}$ , de volume non nul, qui constitue le bassin d'attraction. L'attracteur  $\mathcal{A}$  est la limite asymptotique des solutions partant de toutes conditions initiales (C.I) situées dans  $\mathcal{B}$ .

Les phénomènes d'attractions ont pour conséquences, tout d'abord l'oubli des C.I (conditions initiales), puis l'apparition d'une condition sur la dimension de l'attracteur. Dans le plan de phases  $(\theta, \dot{\theta})$  du pendule entretenu, considérons un ensemble de C.I occupant une certaine région d'extension  $\Gamma$ , on remarque que l'aire  $\Gamma$  (délimitant l'ensemble des C.I) est progressivement réduite à un segment quand l'attracteur  $\mathcal{C}$  est atteint (voir FIG-4). La dissipation a pour effet la contraction des aires.

Il s'ensuit une perte d'information correspondant à la position relative des points initialement contenus dans  $\Gamma$ , quand les points rejoignent  $\mathcal{C}$  l'information disparaît irrémédiablement.

Cet oubli de la position exacte d'un point initial n'est pas sans conséquence, et a un corollaire qui doit être souligné. Dans notre pendule quand les diverses C.I atteignent l'asymptote, alors une seule trajectoire subsiste : la ligne  $\mathcal{C}$ . Il suffit maintenant d'une seule abscisse curviligne, le long de cette courbe, afin de repérer le point figuratif. Ce cas particulier met en évidence un fait très général, comme quoi, la dimension de l'attracteur  $d$  est inférieure à celle de l'espace des phases  $n$ , c'est-à-dire au nombre de degrés de liberté de notre système dynamique.

$$(d < n)$$

La conséquence immédiate d'un tel résultat est que le volume de l'attracteur est nul dans  $\mathbf{R}^n$ .

**Remarque :** dans un espace de dimension 3, le mot volume s'entend au sens usuel du terme, tout attracteur possède ici une dimension inférieure à 3 ( $d < 3$ ), et son volume est nul.

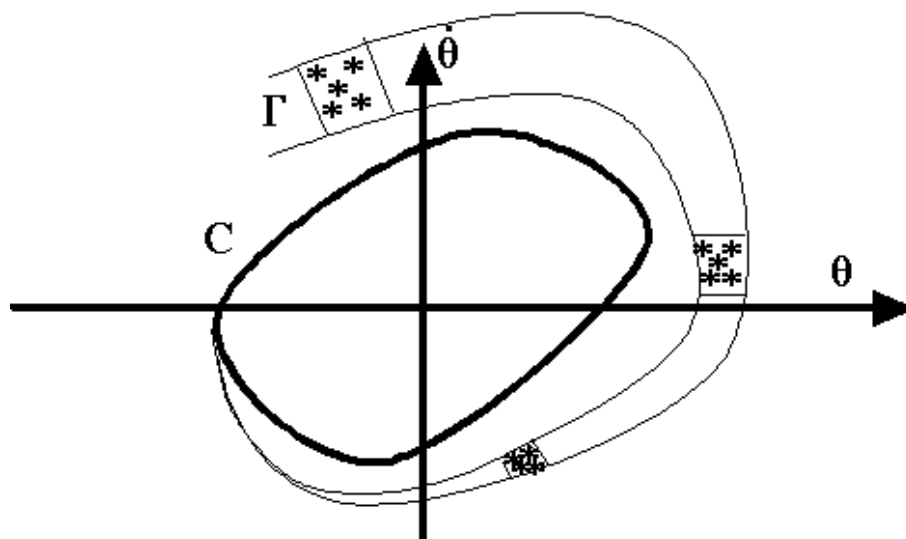


FIG.4-Contraction des aires associée à l'attraction.

## 4.2 L'étonnante SCI

Dans un régime chaotique le spectre de puissance de l'une des variables  $X$  du système comporte une partie continue. On sait, d'après le théorème de Wiener-Kintchine, que la fonction d'auto-corrélation temporelle,  $C(\tau)$ , est la transformée de Fourier du spectre de puissance. Il est utile d'introduire  $C(\tau)$  afin d'estimer le taux de désordre du système. En conséquence, pour  $X(t)$  constant, périodique ou quasi-périodique,  $C(\tau)$  restera non nul quand  $\tau$  tendra vers l'infini. Ainsi ces différents systèmes gardent leur similitude interne quand le temps s'écoule.

Il en est pas de même pour un régime chaotique, où on a  $C(\tau)$  qui tend vers 0 quand  $\tau$  augmente. La fonction d'auto-corrélation temporelle a donc une portée finie. On en déduit que la similitude temporelle du signal avec lui-même diminue et disparaît à des instants suffisamment éloignés. La connaissance de  $X(t)$  pendant un laps de temps aussi long que l'on veut, ne permet pas de prédire le comportement futur de  $X(t)$ !

La perte progressive de la similitude interne d'un régime chaotique, le rend imprévisible.

**Corollaire :** deux trajectoires de l'espace des phases, initialement très voisines, s'écartent nécessairement l'une de l'autre (voir FIG-5). Les trajectoires dépendent donc fortement de leur point de départ.



*Cette très importante propriété d'amplification (amplification exponentielle) des erreurs ou incertitudes initiales dans un régime chaotique se nomme sensibilité aux conditions initiales (SCI).*

Cependant cette divergence des C.I est un enrichissement de l'information. Un ensemble d'états initiaux aboutit à une multitude d'état finals, mais l'on ne peut prédire cette évolution.

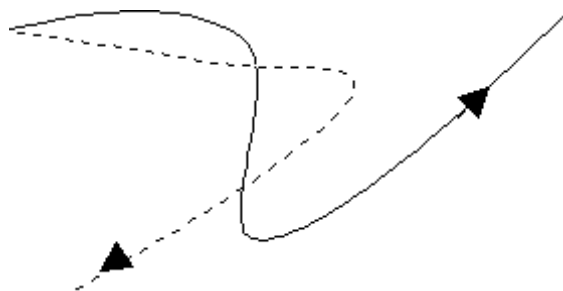


FIG.5-Illustration de la divergence de deux trajectoires de l'espace des phases initialement voisines.

### 4.3 Paradoxes

La notion d'attracteur doté de SCI implique un double paradoxe. Cette notion est fort peu intuitive.

- On est forcé de constater l'antinomie apparente entre l'attraction, qui implique un resserrement des trajectoires, et la SCI qui, au contraire, entraîne leur divergence.

Pour résoudre ce problème il nous faut donner une dimension minimale pour l'attracteur et donc minimale pour l'espace des phases.

La SCI étant impossible sur un attracteur bidimensionnel (les trajectoires finiraient par se couper tôt ou tard)<sup>2</sup>, il faut donc que les trajectoires évoluent dans un espace de dimension au moins égale à 3.

La SCI nécessite *un étirement*.

Avec l'attraction les trajectoires sont confinées dans un espace borné, ce qui implique *le repliement*.

Étirement et repliement sont les deux ingrédients clefs du chaos.

Ainsi il existe maintenant un contrepoint à l'attraction, destructrice d'informations, c'est la divergence (SCI), créatrice d'informations.

---

<sup>2</sup>Ce qui rejoint le corollaire du théorème de Poincaré-Bendixson qui nous interdit d'avoir un attracteur étrange en dimension 2.

- Il apparaît maintenant un second paradoxe<sup>3</sup> entre attraction et SCI.

Pour que la SCI soit possible il faut que la dimension de l'attracteur  $d$  soit supérieure à 2 (comme nous l'avons mentionné ci-dessus), ( $d > 2$ ), et nous avons vu (dans la partie 4.1) que dans un espace des phases de dimension  $n$  le volume de l'attracteur est nul, ( $d < n$ ). On obtient :

$$2 < d < n$$

Si nous prenons maintenant un espace tridimensionnel ( $n=3$ ), on remarque que la dimension d'un attracteur dans cet espace susceptible de représenter un régime chaotique est tel que :  $2 < d < 3$ .

Ces attracteurs ont une dimension non-entière on la dit *fractale*, c'est pour cette raison qu'on les a baptisé *attracteurs étranges*.

## 4.4 Conclusions

Un système dynamique peut devenir chaotique à partir d'une dimension de l'espace des phases supérieure ou égale à 3. Ce chaos, à petit nombre de degrés de liberté, est dû à la SCI des trajectoires parcourant des attracteurs particuliers, appelés *attracteurs étranges*. Les propriétés de ces attracteurs sont :

1. Les trajectoires de phases sont attirées vers l'attracteur.
2. les paires de trajectoires voisines divergent sur l'attracteur (SCI).
3. la dimension  $d$  de l'attracteur est fractale.

**En résumé :** *la notion de SCI nous interdit à tout jamais l'espoir d'être un jour capable de prédire le devenir d'un système dynamique dont le flot s'inscrit sur un attracteur étrange.*

---

<sup>3</sup>Je suis forcé d'avouer que je trouve ce paradoxe tout particulièrement fascinant.

## 5 Exemples d'Attracteurs Étranges

### 5.1 L'Attracteur de Lorenz

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= PrY - PrX \\ \frac{dY}{dt} &= -XY + rX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ\end{aligned}\tag{5}$$

En 1963, le météorologue Edward Lorenz effectua une oeuvre de pionnier en étudiant sur ordinateur l'évolution temporelle de ce système défini par 3 équations dans un espace à 3 dimensions. Cette évolution correspond à ce que nous appelons de nos jours le chaos. Remarque : dans le système (5),  $r$  est un paramètre de contrôle, on prendra souvent  $Pr = 10$  et  $b = 8/3$ .

Pour des valeurs de départ  $X(0), Y(0), Z(0)$ , prises au hasard (avec  $r > 24.74$  afin d'assurer l'instabilité des solutions), les trajectoires qui correspondent au flot défini par le système d'équations (5), sont très rapidement attirées dans une région  $\mathcal{A}$  de l'espace des phases. Cette région  $\mathcal{A}$  est formée de l'ensemble des trajectoires « tournant » autour de deux points fixes instables du flot. On obtient un attracteur étrange appelé attracteur de Lorenz (voir FIG-6).

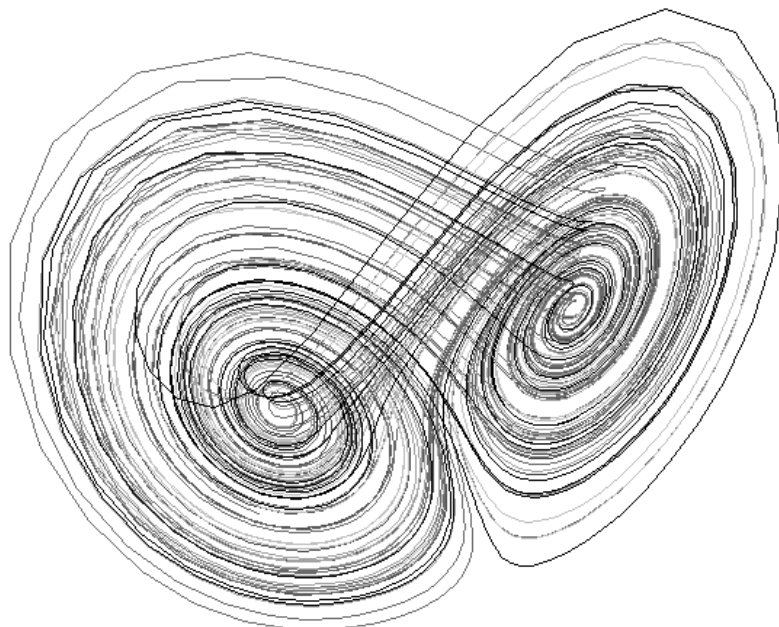


FIG.6-Attracteur de Lorenz pour  $r = 28$ .

Il est important de définir les différentes caractéristiques du système qui nous permettront d'affirmer sa nature chaotique.

- **La dérivée de Lie :**

Elle nous permet de calculer la contraction des volumes du flot. Formule générale :

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i} \quad (6)$$

Dans le système considéré (5) la dérivée de Lie prend la valeur suivante :

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(Pr + b + 1) = -\frac{41}{3}$$

Au bout d'une unité de temps (qui correspond approximativement à la durée d'une révolution autour des 2 points fixes instables), le volume du flot est contracté d'un facteur  $\exp(-41/3) \simeq 10^{-6}$ .

On peut donc en conclure que le modèle de Lorenz est très dissipatif.

- **La section de Poincaré :**

Plutôt que d'étudier la solution de (5) dans  $\mathbf{R}^3$ , il peut être intéressant d'observer un plan de coupe de la solution. La méthode des coupes de Poincaré simplifie l'étude de flots continus pour plusieurs raisons :

Elle entraîne la réduction d'une unité le nombre de coordonnées à prendre en considération.

Elle effectue une discrétisation du temps rendant le système plus facile à résoudre. La section de Poincaré conduit à remplacer la description de l'évolution à temps continu (5) par une application à intervalles de temps discrets du type (7) :

$$X_i(k+1) = T(X_i(k)) \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

Enfin la section de Poincaré présente le même genre de propriétés topologiques que le flot qui lui donne naissance. Si le flot est dissipatif, comme il est question pour le modèle de Lorenz, il y a contraction des volumes dans l'espace des phases et cela entraîne que les aires du plan, de la coupe de Poincaré, se contracte de façon analogue.

Une section de Poincaré qui peut être fructueuse dans notre étude du modèle de Lorenz est réalisée en posant  $Z = r - 1$  et  $\dot{Z} > 0$ , nous obtenons un plan qui contient les 2 points fixes instables et qui démontre la structure complexe de l'attracteur. Celui-ci ne peut être que de dimension fractale. Une analyse plus poussée donne la dimension de Hausdorff-Besicovitch (voir section suivante) de l'attracteur de Lorenz, soit  $d = 2.06$ .

- **L'application de premier retour**

L'étude d'un flot tridimensionnel peut dans certains cas se ramener à celle d'une application unidimensionnelle. Il est possible de tirer d'une application de premier retour des renseignements importants sur le flot, à savoir que ces applications non-linéaires unidimensionnelles du type  $X_{k+1} = \mathcal{F}(X_k)$ , peuvent rendre compte d'un comportement chaotique.

Lorenz avait tracé une telle application en portant la valeur d'un maximum de  $Z$ , soit  $Z_{k+1}$  en fonction de  $Z_k$  (maximum précédent).

On remarque avec étonnement la régularité de la courbe obtenue (voir FIG-7).

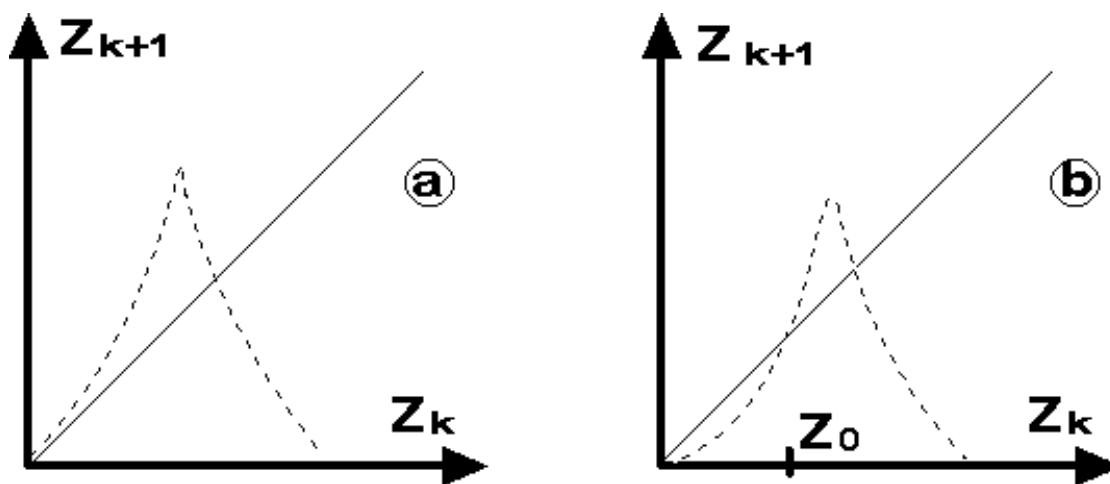


FIG.7-Application de premier retour du modèle de Lorenz. a) pour  $r > 24.06$   
b) pour  $r < 24.06$

Si la pente de la courbe  $Z_{k+1} = \mathcal{F}Z_k$  est partout supérieure à 1, en valeur absolue et dans l'intervalle de l'application, alors ceci garantit un comportement chaotique permanent  $\forall Z_0$  valeur initiale (voir FIG-7a).

Cette situation change par la diminution de la valeur de  $r$ , comme le montre la figure 7b, une portion de courbe  $Z < Z_0$  a maintenant une pente inférieure à 1, ce qui entraîne un point fixe de coordonné  $Z_0$ . Ainsi les trajectoires issues des valeurs initiales  $< Z_0$  sont attirées vers le point fixe, par contre, les trajectoires qui correspondent à des valeurs initiales  $> Z_0$  évoluent dans le chaos jusqu'à arriver dans la zone  $Z < Z_0$ , alors elles convergent aussi vers le point fixe.

- **La SCI :**

On peut montrer la SCI de l'attracteur de Lorenz en étudiant l'évolution d'un écart  $\delta$  petit de 2 points initiaux. Nous effectuerons une telle étude dans l'exemple de l'attracteur de Hénon.

## 5.2 L'Attracteur de Hénon

En transformant des équations à temps continu, du type de celles de Lorenz, en itérations à temps discret, on obtient un système analogue à (7). Dans ce cas, les points successifs obtenus dans  $\mathbf{R}^2$  doivent être considérés comme appartenant à la section de Poincaré du flot engendré par le système des 3 équations différentielles.

Hénon a proposé l'application suivante du plan sur lui-même :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= Y_k + 1 - \alpha X_k^2 \\ Y_{k+1} &= \beta X_k \end{aligned} \tag{8}$$

$\alpha$  contrôle la non linéarité de l'itération,  $\beta$  traduit le rôle de la dissipation. En général, on prend  $\alpha = 1.4$  et  $\beta = 0.3$ .

Remarque : le système (8) est inversible dans le temps.

La façon dont apparaissent les points successifs du système (8) au cours des itérations est irrégulière, imprévisible et aléatoire. Cependant les points convergent vers un attracteur (voir FIG-8), et à cet égard la dynamique du système se présente bien sous un aspect chaotique.

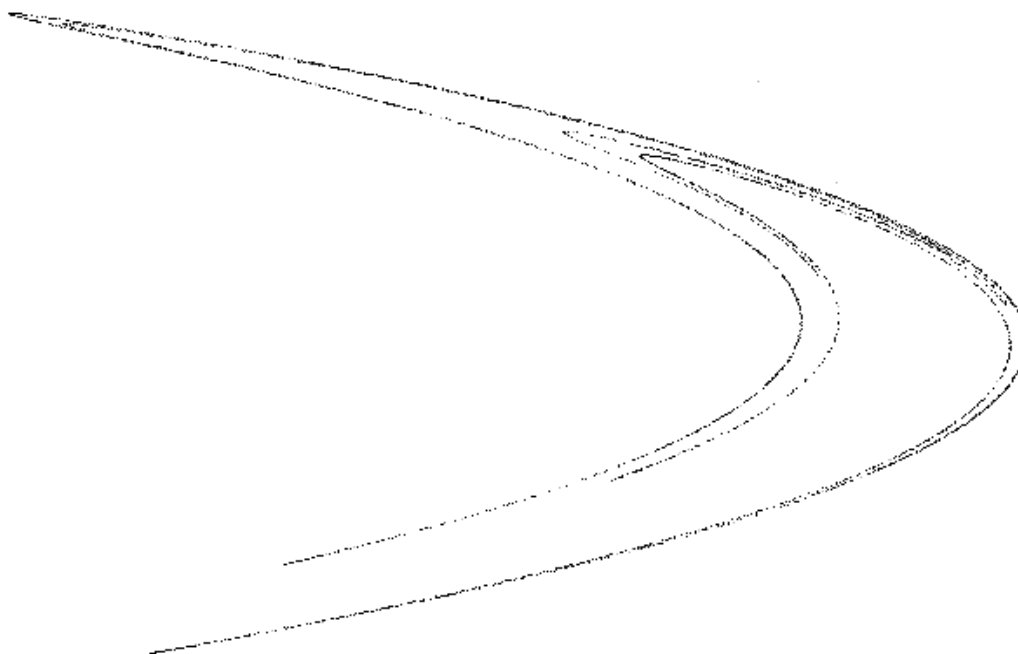


FIG.8-Attracteur de Hénon.

On peut mettre en évidence la SCI par l'étude de l'évolution d'un écart  $\delta$ , initialement très faible, en fonction des itérations (voir FIG-9). Dans les premières itérations, cet écart a une croissance exponentielle, on peut ainsi se permettre de conclure, grâce au calcul numérique, que l'attracteur de Hénon est bien un attracteur étrange.

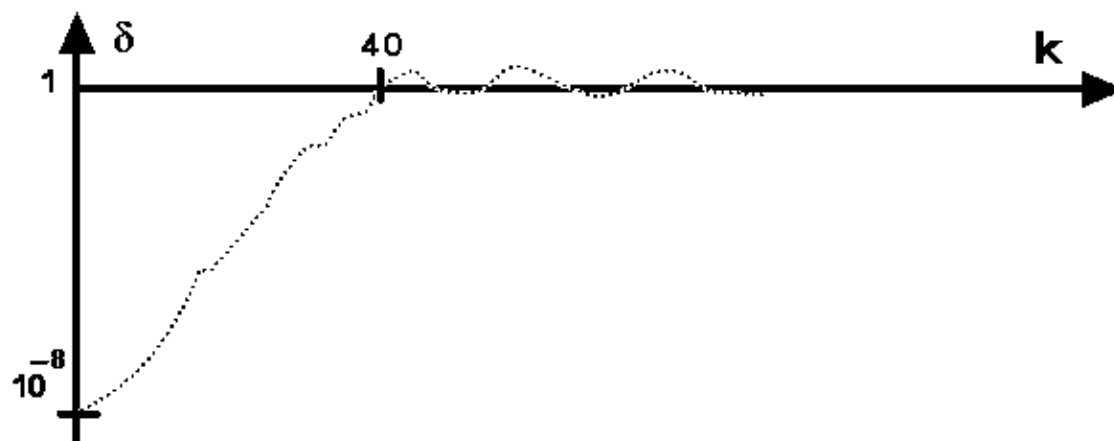


FIG.9- Représentation schématique de l'évolution d'un écart  $\delta$  entre 2 valeurs initiales (échelle semi-logarithmique).

Remarque : une estimation du plus grand des exposants de Lyapunov,  $\lambda_1$ , est donnée par la pente de la courbe, ainsi  $\lambda_1 \simeq 0.5$ . Pour plus de précision concernant ces exposants, se référer à la section correspondante.

Revenons maintenant sur la contraction des aires. Dans le cas d'une application à 2 dimensions, le *Jacobien* du système joue le rôle de la dérivée de Lie, soit :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_{k+1}}{\partial X_k} & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial Y_k} \\ \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial X_k} & \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial Y_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\alpha X_k & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -\beta$$

Ainsi les aires sont multipliées à chaque itération par un facteur  $|\beta|$  (ici 0.3), il y a contraction des aires pour  $|\beta| < 1$ .

Cette contraction est faible comparée au facteur  $10^{-6}$  de Lorenz. Ce qui entraîne que pour Lorenz, la contraction très rapide des aires, empêche de discerner la structure fractale de la section de Poincaré de l'attracteur. Tandis que pour Hénon, on peut mettre en évidence une structure fractale.

En particulier, n'importe quelle région de l'attracteur (8), lorsqu'elle est agrandie, se révèle tout aussi finement structurée que la figure plus grande dont elle est extraite. Autrement dit, il y a une régression infinie de détails, un emboîtement sans fin de structures. Par ailleurs, la dimension de Hausdorff de l'attracteur de Hénon, objet intermédiaire entre ligne et surface vaut  $d = 1.26$  (pour plus de détails voir section suivante).

Cet attracteur de Hénon va nous permettre de mettre en évidence un fait établi précédemment, à savoir la coexistence entre la contraction des aires et la SCI (voir FIG-10).

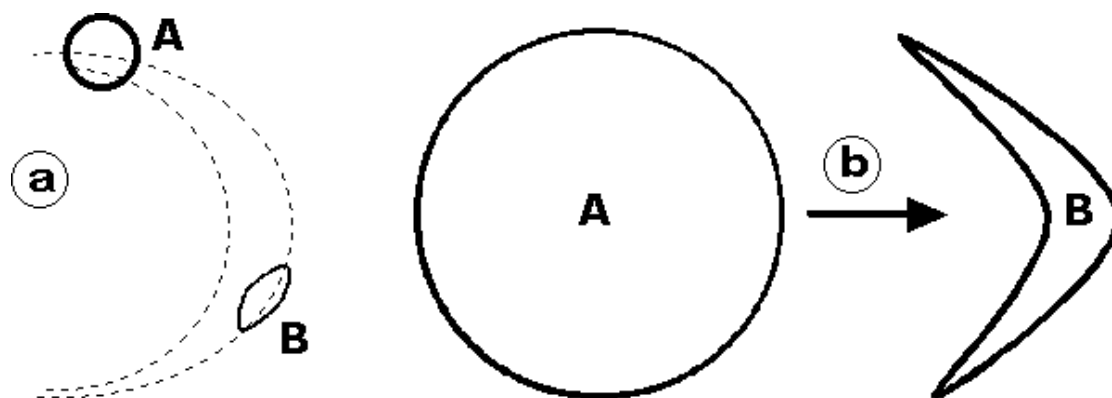


FIG.10-Déformation d'un cercle A par itérations successives de la transformation de Hénon.  
a) A se trouve sur l'attracteur.  
b) A est de l'ordre de grandeur de l'attracteur.

Prenons le cas de figure 10-a, après une première itération des points de l'ensemble  $\mathcal{A}$ , on obtient l'ensemble  $\mathcal{B}$ . On remarque l'effet d'étirement tangentiellement à l'attracteur et l'effet de la contraction dans une direction sensiblement perpendiculaire. A l'opposé si le domaine  $\mathcal{A}$  est de l'ordre de la taille de l'attracteur, comme l'illustre la figure 10-b, on montre ici la double opération *étirement-repliement*.

Nous retrouvons la notion d'hyperbolicité, impliquant une convergence des trajectoires dans une direction, et une divergence dans une autre.

Remarque : Il nous faut garder à l'esprit que l'attracteur de Hénon doit être considéré comme la section de Poincaré du flot tridimensionnel d'un régime chaotique.



## 6 Dimension d'un Attracteur

« Si l'ordre est le plaisir de la raison,  
le désordre est le délice de l'imagination »  
Paul CLAUDEL

Avant d'aller plus loin dans notre étude, il serait bon de mentionner quelques rappels. Nous avons vu qu'un régime dynamique peut être caractérisé par l'analyse de Fourier. Cependant, on ne distingue pas un chaos déterministe, d'un bruit blanc (très grand nombre de modes ou degrés de liberté indépendants). D'où l'étude des trajectoires de phases, par le biais des sections de Poincaré, apporte un progrès décisif, mais les renseignements obtenus restent qualitatifs et se limitent, en pratique, à des espaces de phases tridimensionnels.

Une caractéristique plus quantitative d'un régime chaotique découle de la détermination du plus grand exposant de Lyapunov (voir section correspondante).

Une autre caractéristique intéressante d'un régime chaotique est donnée par la dimension fractale de l'attracteur, cette dimension représente une mesure de la complexité du système et c'est cette notion que nous allons maintenant étudier.

Remarque : La géométrie fractale s'étudie sur ordinateur et peut faire apparaître des richesses de figures d'une esthétique surprenante.

### 6.1 Dimensions Fractales

Soit un ensemble de points situés dans un espace à  $p$  dimensions. Cherchons à couvrir cet espace par des « cubes » de côté  $\varepsilon$ , on obtient alors  $N(\varepsilon)$  cubes.

Par définition la dimension de Hausdorff-Besicovitch  $D$  vaut :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (9)$$

Autrement dit pour  $\varepsilon$  petit on a  $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$ .

Prenons différents exemples :

- Cas du point unique  $N(\varepsilon) = 1$  Donc  $D = 0$ .
- Cas d'un segment de longueur  $L$ ,  $N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon} = L\varepsilon^{-1}$  donc  $D = 1$ .
- Cas d'une surface  $S$ ,  $N(\varepsilon) = \frac{S}{\varepsilon^2} = S\varepsilon^{-2}$  donc  $D = 2$

Jusque ici on a rien ajouté à la notion de dimension d'Euclide.

Par contre, si on considère l'ensemble *triadique de Cantor* qui est obtenu en enlevant au segment unité son tiers central, et en répétant cette opération indéfiniment, on obtient une infinité de points disjoints (voir FIG-11), et la dimension d'un tel ensemble est intermédiaire entre 0 et 1 !

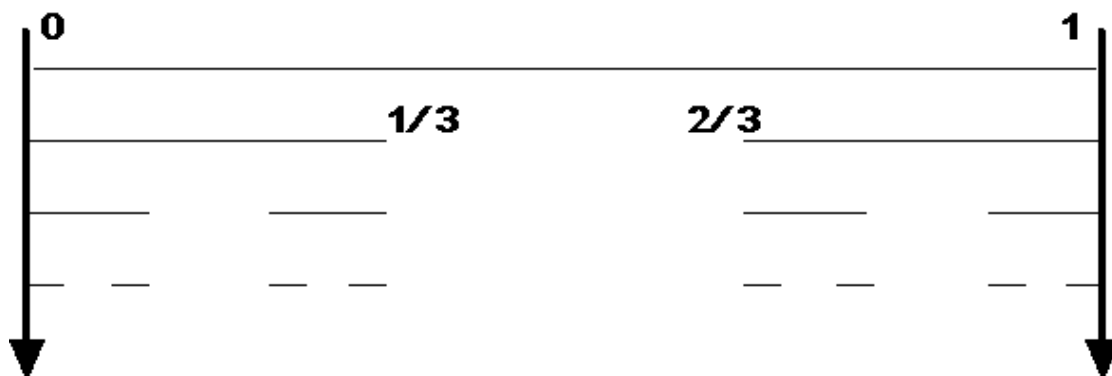


FIG.11-Premières étapes de la construction de l'ensemble triadique de Cantor.

Nous allons effectuer le calcul de la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor.

Soit pour  $\varepsilon = 1/3$  on a  $N(1/3) = 2$  et pour  $\varepsilon = 1/9$  on a  $N(1/9) = 4$ .

Plus généralement pour  $\varepsilon = (1/3)^m$  on a  $N(\varepsilon) = 2^m$  d'où ce qui entraîne :

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} \simeq 0.63$$

On peut considérer un second exemple, celui d'un objet fractal classique nommé *flocon de neige* (voir FIG-12). Soit un triangle équilatéral, divisons chaque côté en trois parties et construisons trois nouveaux triangles équilatéraux sur les tiers centraux. En répétant un nombre infini de fois cette opération, on obtient un objet fractal<sup>4</sup>.

Ce flocon de neige a comme propriété curieuse d'avoir un périmètre infini tout en occupant une fraction bornée du plan. Sa dimension est comprise entre 1 et 2, et avec un raisonnement analogue à celui de l'ensemble de Cantor, on trouve :

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1.26$$

<sup>4</sup>Cet objet, comme l'ensemble triadique de Cantor, présente une invariance d'échelle.

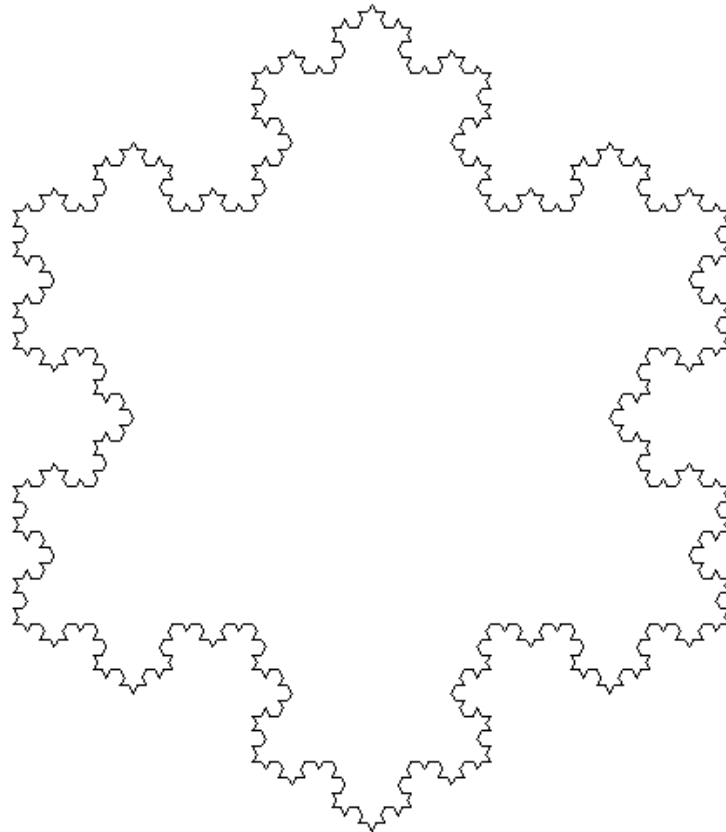


FIG.12-Premières étapes de la construction du flocon de neige.

Malheureusement, la méthode qui consiste à employer la relation de définition de la dimension  $D$  de Hausdorff (9), se révèle inadéquate dès que la dimension  $p$  de l'espace est supérieure à 2. On doit avoir recours à une autre approche du problème qui permette un accès rapide à une dimension fractale  $\nu$ , donnant une valeur approchée par défaut de  $D$  ( $\nu \leq D$ ).

Pour illustrer notre propos, on va utiliser un exemple emprunté à la géométrie plane, on ne limite pas pour autant la généralité.

Soit un ensemble de points sur un plan<sup>5</sup> et  $N(r)$  le nombre de points situés à l'intérieur d'un cercle de rayon  $r$ . La dimension  $\nu$  est obtenue à partir de la loi de variation de  $N(r)$  avec  $r$ , soit :

- Un ensemble de points sur une courbe donnera  $N(r) \sim r$ , et en considérant que  $N(r) \sim r^\nu$ , on obtient  $\nu = 1$ .
- Un ensemble de points répartis sur une surface donnera  $N(r) \sim r^2$  donc  $\nu = 2$ .
- L'ensemble de Cantor fera apparaître après calculs  $N(r) \sim r^{0.63}$  donc  $\nu = 0.63$ .

---

<sup>5</sup>qui peut être une section de Poincaré.

On peut généraliser cette méthode à des espaces de dimensions  $p$ ,  $N(r)$  représentant alors le nombre de points contenus dans *une hypersphère* de rayon  $r$ .

Remarque :  $\nu$  dépend de la densité des points sur l'attracteur, tandis que  $D$  dépend de sa construction géométrique.

## 6.2 Caractérisation Géométrique

Dans un régime chaotique, caractérisé par un attracteur étrange, les positions de 2 points d'une même trajectoire éloignés dans le temps sont sans corrélation entre elles (encore et toujours à cause de la SCI), par contre on peut caractériser une corrélation spatiale entre les points situés sur l'attracteur. On aura donc une fonction  $C(r)$  de la forme :

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} * (\text{nombre de paires } i, j \text{ dont la distance } |\vec{x}_i - \vec{x}_j| < r)$$

$i, j$  sont 2 indices repérant les points sur la trajectoire qui en compte  $m$  au total.

Et  $\vec{x}_{i,j}$  est la distance de l'origine de l'espace des phases au point  $i, j$ .

On peut aussi écrire avec l'aide de la fonction  $H$  d'Heaviside :

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m H(r - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (10)$$

Or, le nombre de paires  $i, j$  dont la distance est inférieure à  $r$  est aussi la somme de tous les  $N(r)$  comptés dans les hypersphères centrées sur tous les points de l'attracteur. On a donc  $C(r) \sim N(r)$  et on en déduit que  $C(r) \sim r^\nu$ .

En pratique, on obtient un algorithme de calculs intéressant pour la détermination de  $\nu$ , pour un domaine limité de  $r$ .  $\nu$  est donné par la pente de la courbe  $\ln C(r) = \mathcal{F}(\ln(r))$ .

Conséquence importante, si la dimension calculé  $\nu$  devient indépendante de  $p$ , dimension de l'espace des phases, on peut conclure que le régime est chaotique, que le chaos est déterministe et que l'attracteur correspondant est étrange. Par contre, si  $\nu$  croît (linéairement) avec  $p$  on est en présence d'un bruit blanc, ou tore  $T^n$ , avec  $n$  grand. Donc, pour obtenir notre chaos déterministe il faut que  $\nu$  arrive à saturer quand  $p$  croît (voir FIG-13).

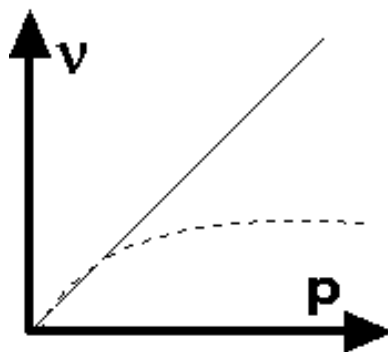


FIG.13-Variation de  $\nu$  avec  $p$ , on notera la différence entre bruit blanc et chaos déterministe.

## 7 En Route vers le CHAOS

### 7.1 Différents Scénarios

Il faut maintenant se poser la question suivante : quelles sont les routes qui mènent un système dynamique régulier vers le chaos ?, et sous quelles conditions un régime périodique en vient à perdre sa stabilité ?

- **La théorie de Floquet**

Considérons une solution périodique d'un flot autonome non linéaire de période  $T$ . On a  $\vec{X}(t+T) = \vec{X}(t)$ .

Afin de savoir si cette solution est stable, il suffit de regarder ce qu'il advient d'un petit écart initial  $\delta\vec{X}$ , par rapport au cycle limite représentatif de cette solution dans l'espace des phases de dimensions  $p$ .

Soit  $\mathcal{M}$  la matrice de Floquet (nous ne détaillerons pas ici son calcul) de dimension  $p \times p$ , on obtient alors au bout d'un temps  $T$  :

$$\vec{X}_0 + \delta\vec{X} \longrightarrow \vec{X}_0 + \mathcal{M}\delta\vec{X}$$

On va regarder ce qui se passe dans la direction « perpendiculaire » à la trajectoire (voir FIG-14a).

Si les valeurs propres de  $\mathcal{M}$  sont situées à l'intérieur du cercle unité  $\mathcal{D}$  du plan complexe, alors l'écart décroît exponentiellement au cours du temps. Si par contre une, au moins, des valeurs propres de  $\mathcal{M}$  se trouve en dehors de  $\mathcal{D}$ , l'écart croît au cours du temps rendant le cycle limite instable. Dans ce cas la perte de la stabilité de la solution périodique se traduit par une *bifurcation*, la courbe sort de  $\mathcal{D}$ . Il existe 3 types génériques de croisement<sup>6</sup> qui sont  $(+1)$ ,  $(-1)$  et  $(\alpha \pm i\beta)$  (voir FIG-14b).

Remarque : si  $p = 2$ , seul le croisement  $(+1)$  peut intervenir.

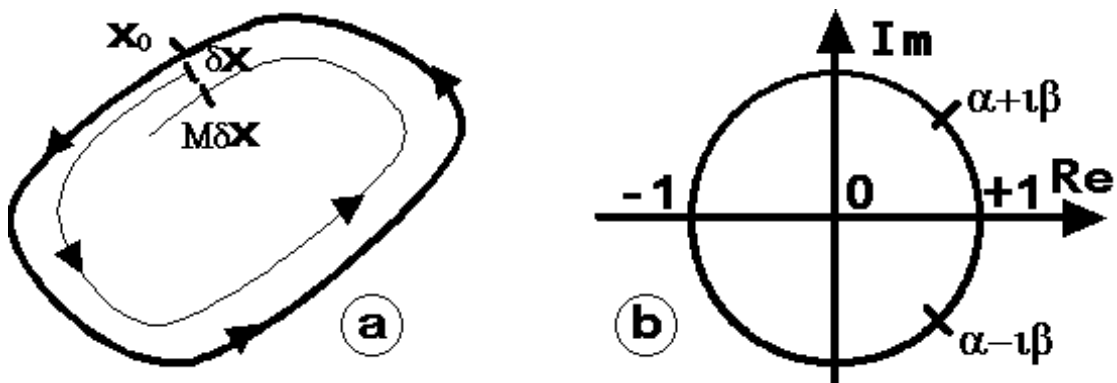


FIG.14-Évolution d'un écart par rapport au cycle limite et les différents types de croisements.

<sup>6</sup>Conditions valables pour  $p \geq 3$ .

- **Transitions résultant de la perte de stabilité**

On peut identifier le chaos à sa manière d'entrer en scène. On connaît trois grands scénarios de transitions vers le chaos : la quasi-périodicité, le doublement de période ou cascade sous-harmonique et l'intermittence (trois types).

Ces phénomènes proviennent des différentes bifurcations<sup>7</sup> possibles de la perte de stabilité linéaire d'un système. On va résumer les différents cas de figure existants dans un tableau suivant les types de croisements que l'on a rencontré précédemment :

Croisement	Bifurcation	Phénomène
+1	noeud-col	intermittence I
-1	sous harmonique normale	cascade sous-harmonique
	inverse	intermittence III
$\alpha \pm i\beta$	Hopf normale	quasi-périodicité
	inverse	intermittence II

La bifurcation est dite normale (ou surcritique) si dans le système les premiers termes non-linéaires d'ordre supérieur s'opposent à l'instabilité engendrée par le terme d'ordre moins élevé. Au contraire, si ces termes tendent à amplifier l'instabilité, alors cela conduit à une bifurcation inverse (ou sous-critique).

Le phénomène de la cascade sous-harmonique a été découvert par un chercheur américain Mitchell Feigenbaum, et par les chercheurs français Pierre Coullet et Charles Tresser. Quand la contrainte augmente, la période d'un oscillateur forcé est multipliée par deux, puis par quatre, par huit etc. . . Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système est chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

Le phénomène d'intermittence est un mouvement périodique stable qui est entrecoupé par de bouffées de bruit. Ce scénario a été décrit par Yves Pomeau.

Le phénomène de quasi-périodicité intervient quand un deuxième oscillateur perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux oscillateurs en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique. Ce scénario un peu compliqué est relié aux travaux sur les systèmes dynamiques du mathématicien Jean-Christophe Yoccoz.

Nous allons examiner plus en détails deux grandes routes qui mènent vers le chaos, la quasi-périodicité et la cascade sous-harmonique.

<sup>7</sup>Si pour une valeur donnée d'un paramètre, dite valeur critique, la solution du système change qualitativement, on dira qu'il y a bifurcation.

## 7.2 La Quasi-Périodicité

- **Bifurcation de Hopf à partir d'un cycle limite**

La section de Poincaré d'un cycle limite  $\mathcal{C}$  permet de conclure que le cycle est linéairement instable lorsque les interactions successives  $x_1, x_2, \dots$ , entre une trajectoire voisine du cycle limite et le plan de coupe, amènent aux relations suivantes  $|\overline{x_0x_1}| < |\overline{x_0x_2}| < \dots$  (voir FIG-15).

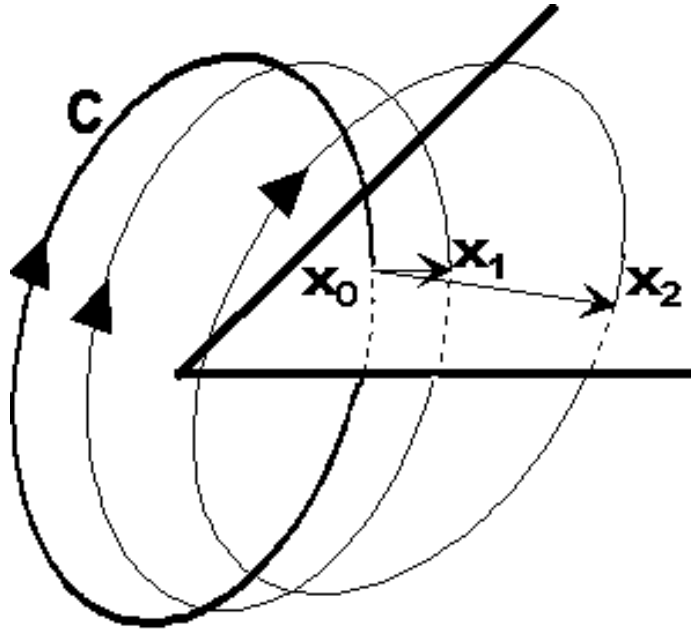


FIG.15-Section de Poincaré sur l'évolution d'une trajectoire de phases voisine du cycle limite  $\mathcal{C}$ .

Soit  $x_0$  l'intersection du plan de coupe avec  $\mathcal{C}$ , on pose  $\overline{x_0x_1} = \delta\vec{x}_1$  et  $\overline{x_0x_2} = \delta\vec{x}_2$ , on sait que  $\delta\vec{x}_2 = \mathcal{M}\delta\vec{x}_1$  avec  $\mathcal{M}$  matrice de Floquet, et que la condition d'instabilité vient du fait que l'une au moins des valeurs propres  $\lambda$  ait un module supérieur à 1.

Si  $\lambda = (1 + \epsilon)$  alors les  $\delta\vec{x}_i$  successifs sont amplifiés dans le même sens à chaque tour (voir FIG-16a).

Si  $\lambda = -(1 + \epsilon)$  alors les  $\delta\vec{x}_i$  sont de même amplifiés en module mais pointent alternativement dans une direction puis dans la direction opposée (voir FIG-16b).

Pour finir, si les deux valeurs propres sont complexes conjuguées,  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  avec  $|\lambda| = 1$ , alors les  $\vec{x}_i$  tournent successivement d'un angle  $\gamma$  à chaque tour tandis que croît leur longueur. Mais si la bifurcation associée à ce dernier type d'instabilité est normale<sup>8</sup>, le cycle limite se transforme en un tore  $T^2$  et la section de Poincaré de ce tore est constituée d'un ensemble de points répartis sur un cercle (voir FIG-16c).

<sup>8</sup>Les effets non-linéaires (il faudrait les définir) limitent l'effet de cette amplification de  $|\vec{x}_i|$  à une valeur finie au bout d'un certain temps.

On obtient ainsi une bifurcation de Hopf<sup>9</sup> normale. Le tore  $T^2$  obtenu correspond à un régime quasi-périodique. Quels événements peuvent conduire ce tore à un attracteur étrange analogue à un régime chaotique ?

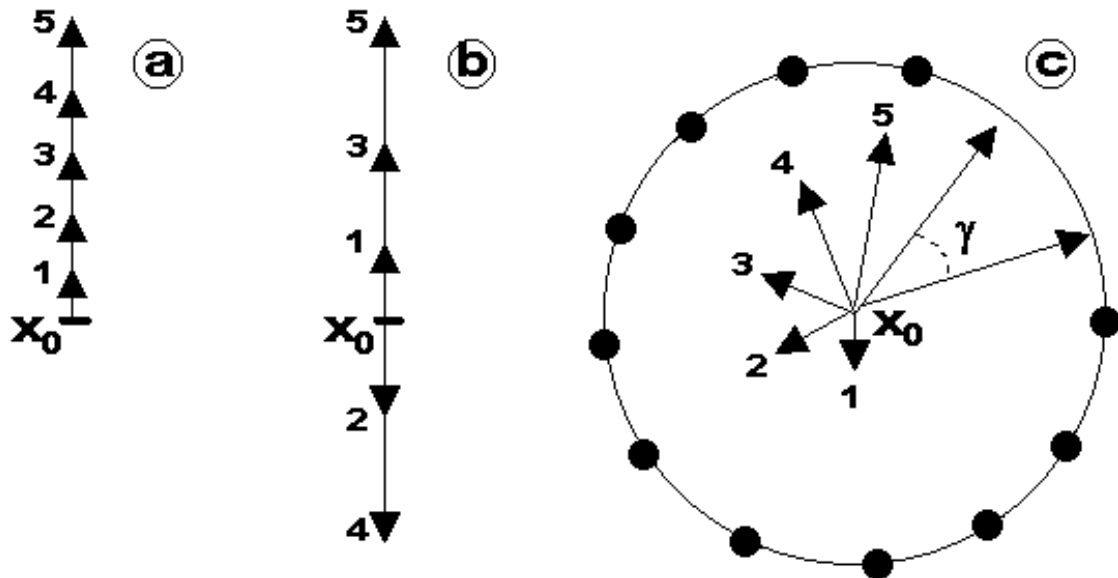


FIG.16-Représentation dans le plan de la section de Poincaré des vecteurs  $\vec{x}_i$  pour  $i$  croissant. Une seule direction a été représentée, celle qui correspond à la plus grande valeur propre  $\lambda$  de la matrice de Floquet  $\mathcal{M}$ .

Trois cas possibles pour différentes valeurs de  $\lambda$  sont envisagés :  
a) pour  $\lambda > 1$   
b) pour  $\lambda < -1$   
c) pour  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  avec  $|\lambda| = 1$

### • Théorie de Ruelle-Takens

Cette théorie proposée en 1971 puis précisée en 1978 par Ruelle-Takens-Newhouse (R.T.N), a remis en cause le mécanisme imaginé par Landau d'après lequel une infinité de bifurcations de Hopf successives serait nécessaire pour engendrer la turbulence (voir section 3). L'idée révolutionnaire de cette théorie est qu'un tout petit nombre de bifurcations suffirait à produire un comportement chaotique.

Soit un système dynamique dans un état stationnaire (point fixe), supposons que par augmentation d'un paramètre de contrôle ce régime perde sa stabilité et devienne oscillant à la fréquence  $f_1$ , puis que ce processus de bifurcation se répète deux autres fois. On se retrouve alors avec 3 fréquences indépendantes  $f_1, f_2, f_3$ . Le tore  $T^3$  obtenu, de comportement quasi-périodique, peut, d'après R.T.N, devenir instable et être remplacé par un attracteur étrange synonyme de régime chaotique (voir FIG-17). Au moment où la troisième fréquence survient, un bruit à large bande devrait commencer à apparaître dans le spectre de puissance (voir FIG-18).

<sup>9</sup>Remarque : on peut obtenir une première bifurcation de Hopf quand un point fixe donne naissance à un cycle limite par franchissement d'une valeur critique.



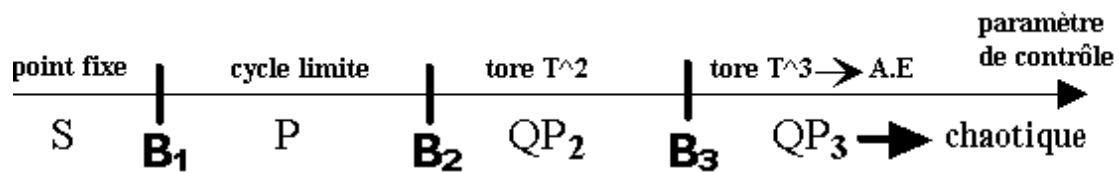


FIG.17-Diagramme des bifurcations successives  $B_1, B_2, B_3$  menant au chaos dans la théorie de Ruelle-Takens.

On notera  $S$  = régime stationnaire,  $P$  = régime périodique,  $QP_2$  = régime quasi-périodique à 2 fréquences,  $QP_3$  = régime quasi-périodique à 3 fréquences et  $A.E$  = attracteur étrange.

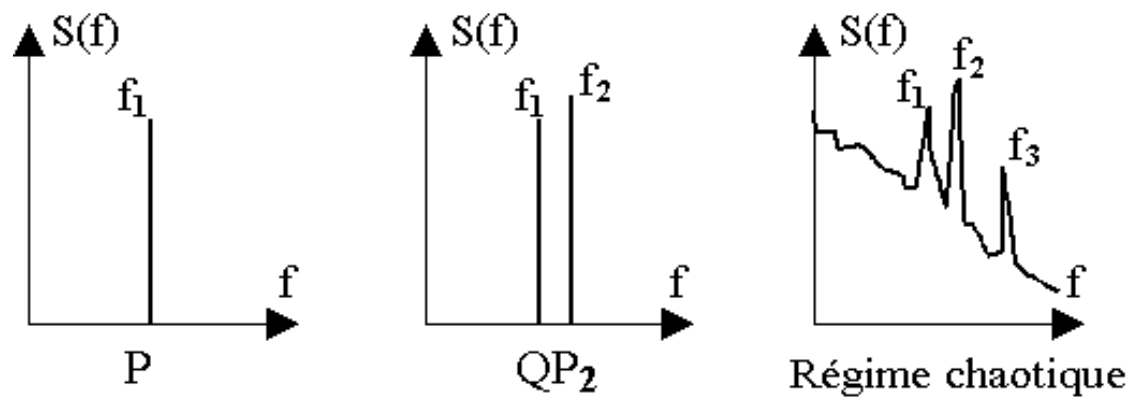


FIG.18-Évolution schématique du spectre de puissance dans la théorie de Ruelle-Takens.

Dans le cas où l'on examine une route liée uniquement à l'apparition de fréquences discrètes, nous allons essayer de comprendre la nécessité d'avoir un régime quasi-périodique à 3 fréquences pour que l'apparition d'un attracteur étrange soit possible.

• **Instabilités dans les régimes dynamique**

Revenons sur l'étude de la figure (17), et sur la séquence des 3 bifurcations de Hopf successives.

La première conduit l'état stationnaire de départ (dans l'espace des phases, le point fixe) à un état périodique (cycle limite).

La deuxième transforme ce régime périodique, défini par une seule fréquence de base  $f_1$ , en un régime quasi-périodique constitué de 2 fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . Nous devons rajouter à cela qu'il faut que le rapport  $f_1/f_2$  soit irrationnel. L'attracteur qui correspond à ce régime est un tore  $T^2$ . La seule instabilité des trajectoires

qui puissent se produire aboutit à la synchronisation<sup>10</sup>, dans ce cas  $f_1/f_2$  devient rationnel. Et l'on dira que l'on est en présence d'un régime d'accrochage (la synchronisation découle d'une théorie qui ne sera pas développée dans notre exposé).

Enfin, la troisième bifurcation de Hopf fait passer du régime quasi-périodique à 2 fréquences à un régime quasi-périodique à 3 fréquences. L'attracteur associé est maintenant un tore  $T^3$ . Du point de vue topologique, le tore  $T^3$  peut être « déplié » dans  $\mathbf{R}^3$  et les trajectoires « naviguent » alors dans un cube. On remarque, contrairement au tore  $T^2$ , que les trajectoires peuvent très bien ne pas être parallèles sans pour autant se couper.

En résumé, l'apparition d'une troisième fréquence permet de développer des instabilités de type différent de la synchronisation. Reste maintenant à déterminer si de petites perturbations sont effectivement suffisantes pour déstabiliser un tore  $T^3$  et le transformer en attracteur étrange, ce qui constitue la synthèse de la théorie de Ruelle-Takens. On peut vérifier facilement ce résultat par l'expérience<sup>11</sup>(simulation numérique).

- **Le chaos à partir d'un tore  $T^2$  ?**

Si le chaos apparaît à partir d'un tore  $T^2$ , c'est-à-dire à partir d'un régime quasi-périodique à 2 fréquences, c'est qu'un autre degré de liberté se manifeste, non plus par l'apparition d'une autre fréquence mais par l'abandon progressif de  $T^2$  par les trajectoires, qui équivaut à une destruction de ce tore.

La preuve de l'existence d'une telle route découle d'expériences numériques<sup>12</sup>, et des éléments d'une théorie mathématique rigoureuse peuvent confirmer ce résultat.

---

<sup>10</sup>On dira qu'il y a accrochage des fréquences parce que le rapport entre les 2 fréquences de base (l'une étant la fréquence de rotation autour du grand cercle, l'autre celle de rotation autour du petit cercle du tore) est un nombre rationnel.

<sup>11</sup>On admettra la théorie R.T.N sans traiter d'illustrations expérimentales.

<sup>12</sup>Comme par exemple, le modèle de Curry et Yorke.

### 7.3 La Cascade Sous-Harmonique

- **Le doublement de période**

La théorie de Floquet permet de comprendre par quel processus prend place le doublement de période.

Rappel : dans le cas de l'instabilité sous-harmonique, le cercle unité  $\mathcal{D}$  du cycle limite est traversé en -1 (voir FIG-14).

Si on examine ce qui se passe lorsqu'une valeur propre de la matrice de Floquet  $\mathcal{M}$  s'approche de la valeur critique -1 et finit par l'atteindre, l'écart à chaque intersection (dans la section de Poincaré) conserve le même module, tout en changeant de signe (voir FIG-19). Partant d'un point  $x_0$ , on y revient exactement après deux itérations, on obtient  $x_2, x_4, \dots$ . On voit apparaître une nouvelle orbite périodique de période double de la précédente. En définitive, le comportement du flot est décrit à travers une application unidimensionnelle du type  $x_{k+1} = \mathcal{F}(x_k)$ , c'est une application de premier retour (toute l'information utile à notre étude se trouve ainsi concentrée dans une direction privilégiée de l'espace des phases).

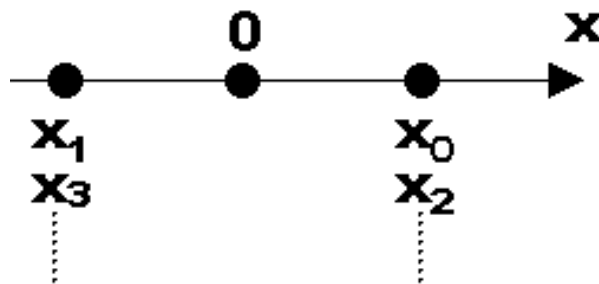


FIG.19-Succession des itérés au point de bifurcation -1.

- **Application quadratique du segment**

Considérons la fonction continue  $f$  suivante :

$$f(x) = 4\mu x(1 - x) \quad x \in [0, 1]$$

On va considérer  $0 < \mu \leq 1$  et on écrira l'application de premier retour suivante :

$$x_{k+1} = 4\mu x_k(1 - x_k) = f(x_k) \quad (11)$$

Prenons par exemple  $\mu = 0.7$ , dans le graphe de l'application  $f(x)$ , quel que soit le point d'origine que l'on prend entre  $]0, 1[$ , toutes les itérations vont converger vers un point fixe d'abscisse  $x^*$  (voir FIG-20a).  $x^*$  est un point fixe stable, c'est un attracteur de période 1.

Mais la situation précédente n'est pas unique, par exemple si  $\mu = 0.8$ , la construction graphique montre que l'application (11) possède deux points particuliers d'abscisses  $x_1^*$  et  $x_2^*$ , tels que  $x_2^* = f(x_1^*)$  et  $x_1^* = f(x_2^*)$  (voir FIG-20b). La différence avec le premier exemple vient du fait que la pente de la tangente de la courbe, au point d'intersection de la courbe et de la première bissectrice, est maintenant supérieure à 1 en module. Les deux points  $x_1^*$  et  $x_2^*$  ne sont pas des points fixes de  $f$  mais constituent un attracteur de période 2. Par ailleurs, ils sont des points fixes de la fonction  $g(x) = f(f(x)) = f^2(x)$ .

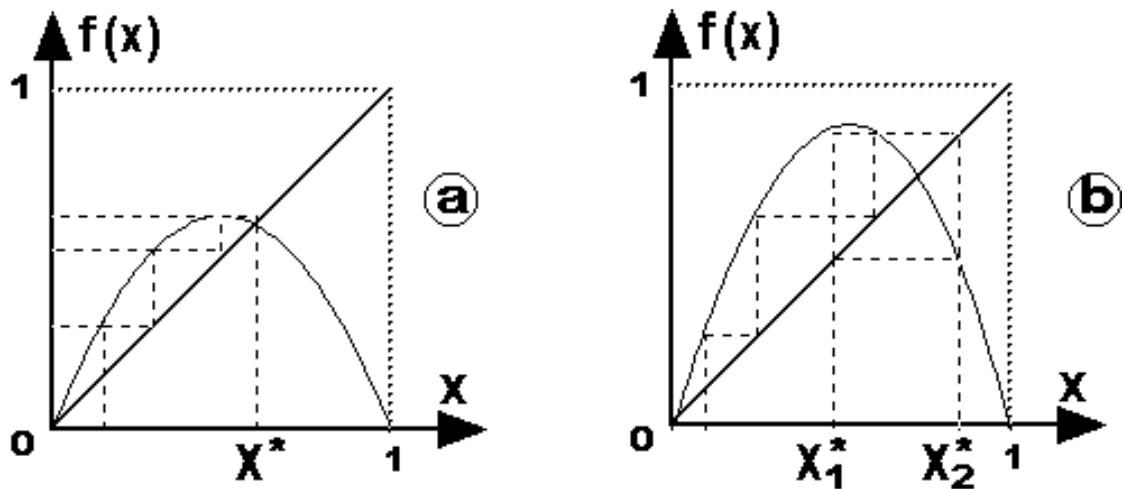


FIG.20-Graphe (schématique) de l'application (11) pour : a)  $\mu = 0.7$   
b)  $\mu = 0.8$

La transition entre les 2 cas de figures des schémas 20a et 20b s'effectue pour une valeur seuil de  $\mu = 0.75$ . Le point fixe stable de  $f$  devient instable et apparaissent deux points fixes stables de  $f^2$ , en d'autres termes, un attracteur de période 1 cède la place à un attracteur de période 2. Par analogie avec la théorie de Floquet lorsque le cercle  $\mathcal{D}$  est traversé en -1, on peut dire qu'il y a doublement de période.

Maintenant, si  $\mu$  prend des valeurs de plus en plus grandes, les points fixes de  $f^2$  perdent à leur tour leur stabilité et  $f^4$  compte 4 points stables. De nouveau il y a doublement de la période par bifurcation sous-harmonique. Au fur et à mesure que  $\mu$  augmente, on observe une succession d'attracteurs de période  $2^l$  avec  $l$  entier. Cette suite croissante de  $\mu$  converge rapidement vers un point d'accumulation  $\mu_\infty = 0.892486418\dots$  calculé numériquement.

On remarque en outre que :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} = \delta$$

$\delta$  correspond au facteur de réduction d'échelle, ce nombre est universel et ne dépend pas de la fonction  $f$  considérée (il est « magique »!). Nous sommes donc en présence d'une théorie générale.

Numériquement on trouve  $\delta = 4.6692016091029909\dots$

- **Caractéristiques du chaos**

Qu'advient-il au-delà du point d'accumulation  $\mu_\infty$  ?

On entre dans une région très complexe où alternent attracteurs périodique et chaos. Chaos, car les conditions nécessaires pour que l'application (11) engendrent l'imprévisible sont satisfaites, à savoir, la non-inversibilité de la transformation et la SCI.

Dans l'intervalle  $[\mu_\infty, 1]$  on ne trouve pas que du chaos mais aussi des domaines dans lesquels la trajectoire est strictement périodique. On note par ailleurs la présence d'une cascade inverse au-delà de  $\mu_\infty$  (de l'ordre dans le chaos!). Les solutions asymptotiques de l'application (11) sont représentées en fonction de  $\mu$ ,  $\mu \in [0.7, 1]$  sur la figure 21.

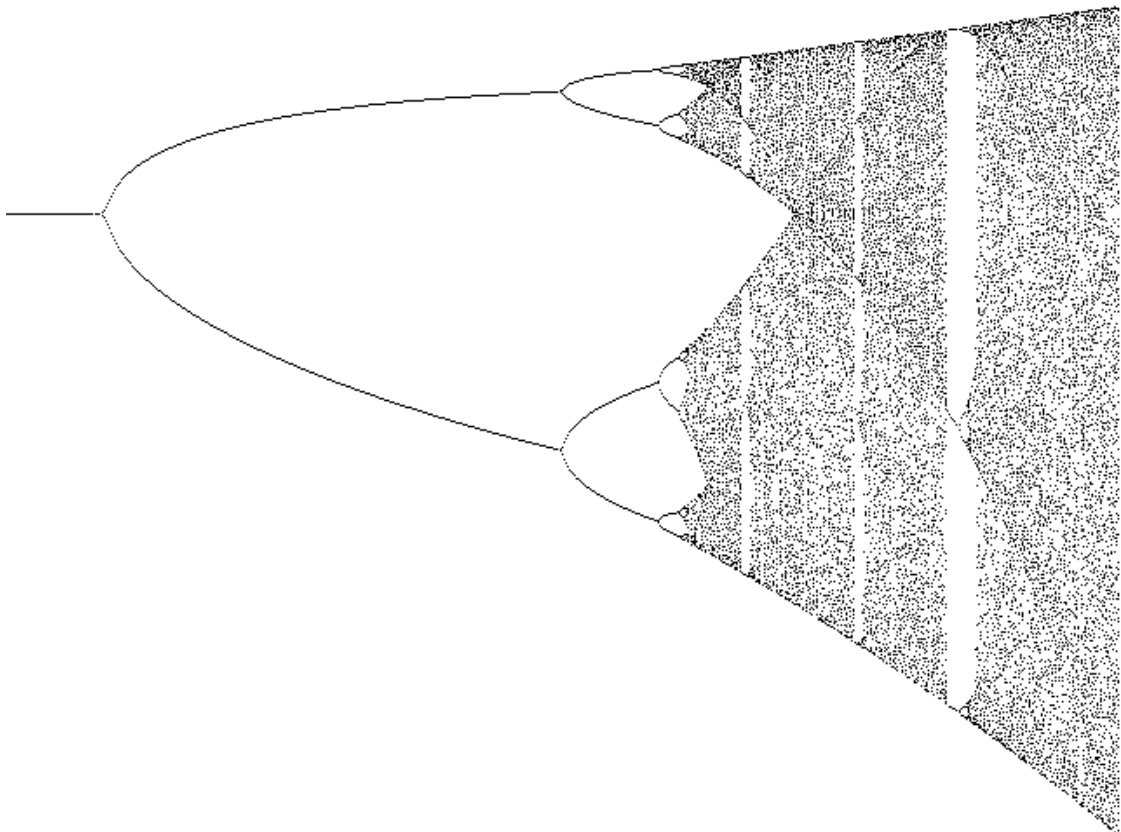


FIG.21-Diagramme de Feigenbaum.

## 8 Exposant de Lyapunov

### 8.1 Description

L'évolution d'un flot chaotique est d'autant plus difficile à saisir que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. C'est pourquoi on essaie d'estimer ou même de mesurer la vitesse de cette divergence. On utilise pour cela un paramètre qui s'appelle *exposant de Lyapunov*.

Soit un flot  $\phi$  tel que  $\frac{d\vec{\phi}}{dt} = F(\vec{\phi})$

Si on linéarise le flot autour de sa solution  $\vec{\phi}(t)$  on obtient comme équation d'évolution de l'écart, noté  $\vec{\delta\phi}(t)$  :

$$\dot{\vec{\delta\phi}} = \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{\phi(t)} \vec{\delta\phi} \quad (12)$$

On ne peut résoudre (12) de façon analytique, mais son intégration numérique est possible :

$$\vec{\delta\phi}(t) = L(t)\vec{\delta\phi}(0)$$

$L$  étant une matrice carrée et pour un flot de dimension  $m$ ,  $L$  possède  $m$  valeurs propres (on a aussi  $L(0) = 1$ ).

On va considérer que la matrice de l'équation (12) ne dépende pas explicitement du temps,  $L$  peut se mettre alors sous la forme (exemple en dimension 3) :

$$\begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\lambda_3 t) \end{pmatrix}$$

Soit  $L^+$  la matrice hermitique conjuguée de  $L$ , on introduit alors la trace du produit de ces deux matrices :

$$Tr(L^+(t)L(t)) = \exp(\lambda_1 + \lambda_1^*)t + \exp(\lambda_2 + \lambda_2^*)t + \exp(\lambda_3 + \lambda_3^*)t$$

quand le temps augmente (ou le nombre d'itération si le temps est discret) l'exponentielle ayant la partie réelle la plus grande, soit  $\lambda$  finit toujours par l'emporter, soit :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln[Tr(L^+(t)L(t))] \quad (13)$$

Ce résultat reste vrai si  $\frac{\partial F}{\partial \phi}$  dépend du temps et que  $L(t)$  ne se met pas sous une forme simple. La limite (13) est appelée exposant de Lyapunov. Pour des temps longs et suivant le signe de  $\lambda$ , on a l'écart  $\vec{\delta\phi}$  qui croît, si  $\lambda > 0$ , ou qui décroît, si  $\lambda < 0$ , en moyenne exponentiellement.

Remarque : quand le temps est discret et sous certaines conditions  $L$  peut représenter le produit des matrices Jacobiennes du système.

## 8.2 Caractérisation d'un Attracteur

Pour une solution chaotique  $\vec{\phi}(t)$  associée à un attracteur étrange, la SCI implique l'existence d'un exposant de Lyapunov  $\lambda > 0$ , c'est une conséquence directe de la divergence de trajectoires voisines.

Donc si on trouve un exposant de Lyapunov positif on a un régime chaotique.

Si on calcule l'exposant de Lyapunov d'une solution périodique ou quasi-périodique stable, on trouve  $\lambda = 0$  (c'est le plus grand des exposants).

Tout écart faible perpendiculairement à la trajectoire régresse au cours du temps, les valeurs propres de la matrice  $L$  sont donc inférieures à 1 ( $\lambda < 0$ ). Par contre, un écart le long de la trajectoire elle-même n'est ni amplifié, ni amorti. Cette invariance de l'écart au cours du temps se traduit par une valeur propre égale à 1 ( $\lambda = 0$ ).

**Conclusion :** Il est donc naturel d'identifier un attracteur à l'aide du signe des coefficients  $\lambda_i$ .

Par exemple pour un flot tridimensionnel qui comporte 3 exposants, on notera :

le point fixe	$(-, -, -)$
le cycle limite	$(0, -, -)$
le tore $T^2$	$(0, 0, -)$
l'attracteur étrange	$(+, 0, -)$

\*

\*



## Deuxième partie

# Du CLASSIQUE au QUANTIQUE

« L'étude du chaos en mécanique quantique semble présenter  
les charmes combinés du flou quantique et de l'imprédictibilité chaotique »

## 1 Le Rotateur Pulsé Classique

### 1.1 Le Modèle Standard de Chirikov

En 1979, Chirikov considère un corps rigide en rotation autour d'un axe fixe, lequel est soumis à une perturbation périodique brutale. Dans ce modèle standard<sup>13</sup>, on constate que la complexité des systèmes non-intégrables apparaît dans tous ses aspects, de plus, ce modèle ne possède que 2 degrés de liberté (simplicité et efficacité!).

L'Hamiltonien classique  $\mathcal{H}$  décrivant ce système a pour expression <sup>14</sup> :

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - kV(\theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - \frac{t}{T}) \quad (14)$$

$p_\theta$  étant le moment angulaire,  $ml^2$  le moment d'inertie,  $k$  la constante de couplage

$k = ml^2\omega_0^2$  avec  $\omega_0^2 = g/l$  et  $V(\theta)$  la force avec  $V(\theta + 2\pi) = V(\theta)$ .

On va considérer  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $V(\theta) = \cos(\theta)$ , l'Hamiltonien (14) est la somme de l'Hamiltonien du rotateur libre avec le potentiel associé à la somme des coups (la période des coups ou des perturbations brutales étant  $T$ ). Notons qu'une perturbation est modélisée par un Dirac.

Nous connaissons les équations d'Hamilton suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{\theta} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\dot{p} \quad (15)$$

On va résoudre ces équations pour les différents cas possibles :

- Pour  $nT < t < (n+1)T$ , on se place entre les coups, dans ce cas l'impulsion est nulle :

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

$\dot{p}_\theta = 0$  et cela entraîne  $p_\theta = \text{constante}$  entre les coups.

<sup>13</sup>Souvent appelé application standard de Chirikov.

<sup>14</sup>Voir article de G. Casati, B.V. Chirikov, F.M. Izraïlev, J. Ford, *Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation*, Lect. Notes in Phys. 93 (1979) 334-351.

- Pour  $nT - \epsilon < t < nT + \epsilon$ , on se place sur les coups et nous obtenons :

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \text{ d'où on a continuité de } \theta(t).$$

et

$$\dot{p}_\theta = -k \sin(\theta) \delta(n - \frac{t}{T})$$

ou encore en intégrant la première expression sur  $nT$  et la seconde entre  $nT - \epsilon$  et  $nT + \epsilon$  :

$$\theta(t) = (t - nT)p_\theta(t) + \theta(nT)$$

et

$$p_\theta(nT + \epsilon) - p_\theta(nT - \epsilon) = -k \int_{nT - \epsilon}^{nT + \epsilon} \sin(\theta(t)) \delta(n - \frac{t}{T}) dt$$

avec ces quelques rappels sur la fonction de Dirac  $\delta(x)$  :

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x) \\ \delta(cx) &= \frac{1}{|c|} \delta(x) \\ \int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) &= f(x_0) \quad \text{si } x_0 \in [a, b] \end{aligned}$$

(16)

et en posant  $\theta_n = \theta(nT)$  et  $(p_\theta)_n = p_\theta(nT - \epsilon)$  on arrive à :

$$(p_\theta)_{n+1} = (p_\theta)_n - kT \sin(\theta_n)$$

et

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{T}{ml^2} (p_\theta)_{n+1}$$

Mais nous allons ramener le système à des variables sans dimension, ainsi on pose  $p_n = (p_\theta)_n \frac{T}{ml^2}$ ,  $K = T^2 \omega_0^2$  et  $q_n = \theta_n + \pi$ . Finalement, le système des équations du mouvements, c'est-à-dire l'intégration et la discrétisation des équations (15), peut s'écrire :

$$q_{n+1} = q_n + p_{n+1} \tag{17}$$

$$p_{n+1} = p_n + K \sin(q_n)$$

le système d'équations (17) est donc l'application standard de Chirikov <sup>15</sup>.

On va regarder ce qui se passe quand  $K$  augmente, il est important de dire que les résultats que nous obtiendrons pourront être considérés comme universels, à savoir que pour des systèmes à 2 degrés de liberté on aura qualitativement les mêmes comportements.

---

<sup>15</sup>Il pourrait très bien s'agir d'une section de Poincaré du type (7), ici son expression a été établie à partir d'un Hamiltonien, par la suite nous pourrons ainsi quantifier le système.

## 1.2 $K$ , Paramètre de Transition

Il nous faut définir un espace des phases, par exemple, si les variables angle-action  $q$  et  $p$  sont telles que  $p \in \mathbf{R}$  et  $q \in [0, 2\pi]$ , l'espace des phases sera un cylindre. Nous choisirons comme espace des phases le tore, c'est-à-dire que  $q$  et  $p$  sont définis modulo  $2\pi$  dans le système d'équations (17). La compacité de l'espace des phases assure le repliement nécessaire à l'apparition du chaos et la variation de la constante de couplage  $K$ , l'étirement. Nous allons démontrer qu'une transition vers le chaos s'opère quand  $K$  augmente.

Remarque : On choisira une définition pour les équations (17) où les variables sont  $q, p$  sont définies modulo 1, ainsi (avec  $K_1 = K/2\pi$ ) :

$$q_{n+1} = q_n + p_{n+1}$$

$$p_{n+1} = p_n + K_1 \sin(2\pi q_n)$$

On va regarder ce qu'il advient du système pour différentes valeurs de  $K$  :

- $K = 0$

Dans ce cas, l'espace des phases est formé de cercle.

- $0 < K < K_c \simeq 0.971635406\dots$  (valeur critique)

On a typiquement une situation K.A.M<sup>16</sup> (Kolmogorov-Arnold-Moser), caractérisée par la présence de cercles invariants. Ici, deux types de points fixes apparaissent : des points elliptiques, autour desquels vont se développer des îlots de stabilité, et des points hyperboliques traduisant l'instabilité du système et le développement de zone chaotique (voir FIG-22).

- $K = K_c$

La valeur  $K_c$  est calculée numériquement, c'est l'instant où le cercle invariant le plus stable se casse.

- $K > K_c$

Peu à peu les îlots de stabilité disparaissent et la diffusion de l'énergie cinétique du système  $\langle p_n^2 \rangle$  commence à apparaître. L'espace des phases voit ses structures uniformément chaotiques s'agrandir et les îlots de stabilité qui survivent deviennent des obstacles pour la diffusion (voir FIG-23).

- $K$  très grand ( $K \gg 4$ )

C'est un régime fortement chaotique, le mouvement est de type diffusion, et l'énergie varie linéairement avec le temps contrairement aux cas précédents (voir FIG-24 et FIG-25). On définit la constante de diffusion  $D$  tel que<sup>17</sup> $\langle p_n^2 \rangle = Dn$ . De plus, le chaos peut être mis en évidence par l'étude de la SCI autour des points initialement elliptiques (voir FIG-26).

---

<sup>16</sup>La théorie K.A.M donne une description du chaos dans les systèmes Hamiltoniens, mais elle ne sera pas développée dans le cadre de notre étude.

<sup>17</sup>Avec  $D \simeq K^2/2(1+\text{corrections sous forme de fonction de Bessel qui décroît quand } K \text{ augmente})$ .

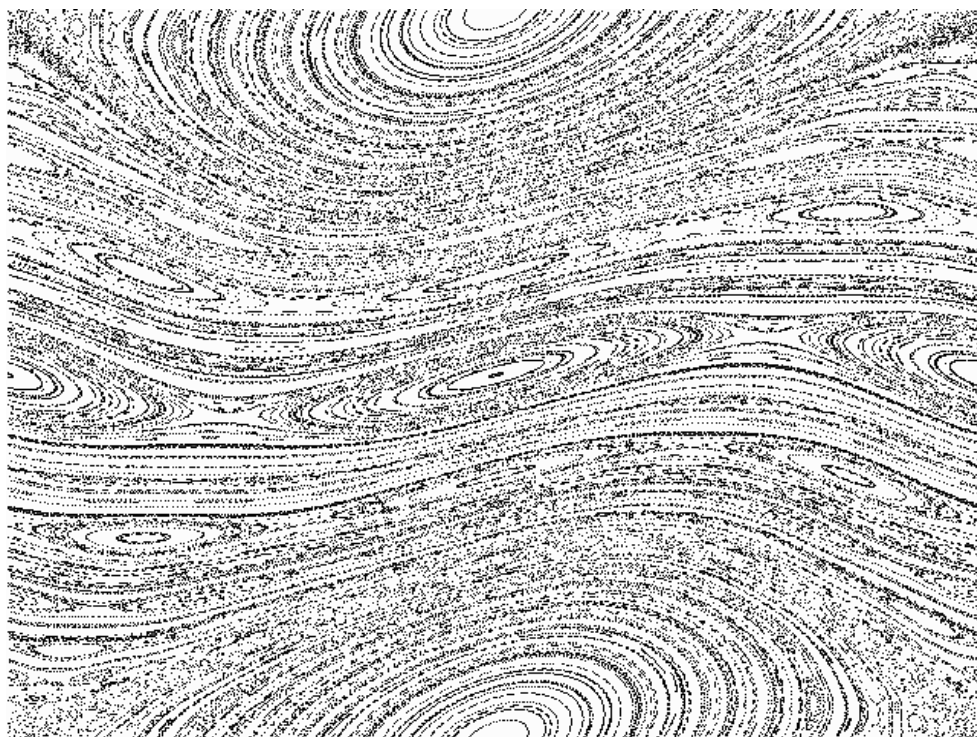


FIG.22-Portrait de phases  $(q, p)$  (modulo 1) de l'application standard pour  $K = 0.7$ .

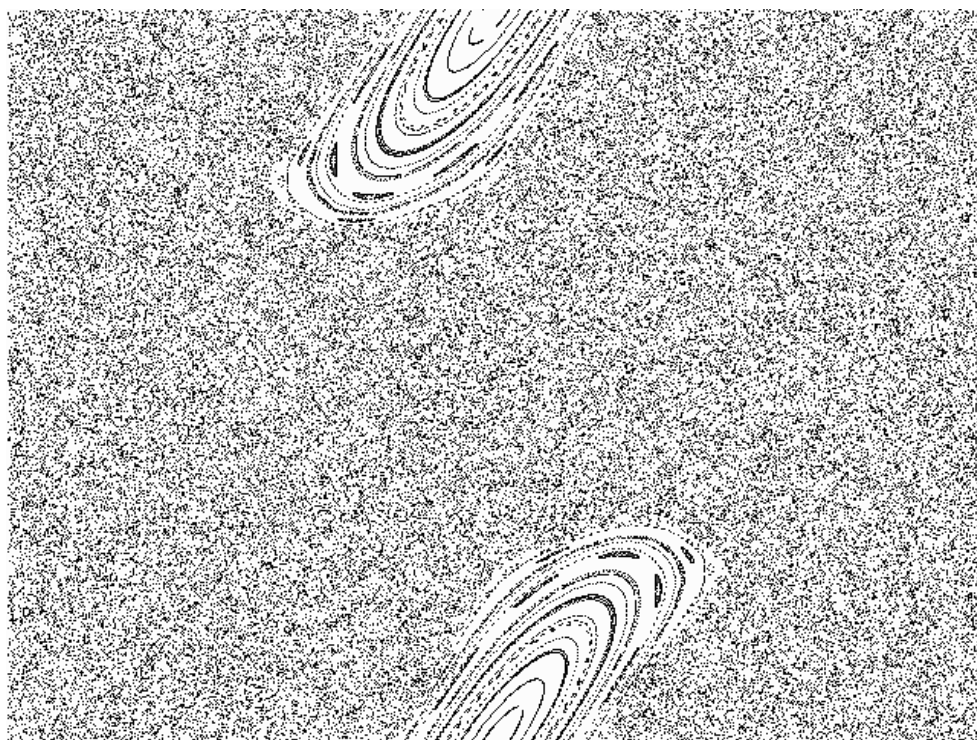


FIG.23-Portrait de phases  $(q, p)$  de l'application standard pour  $K = 3$ .

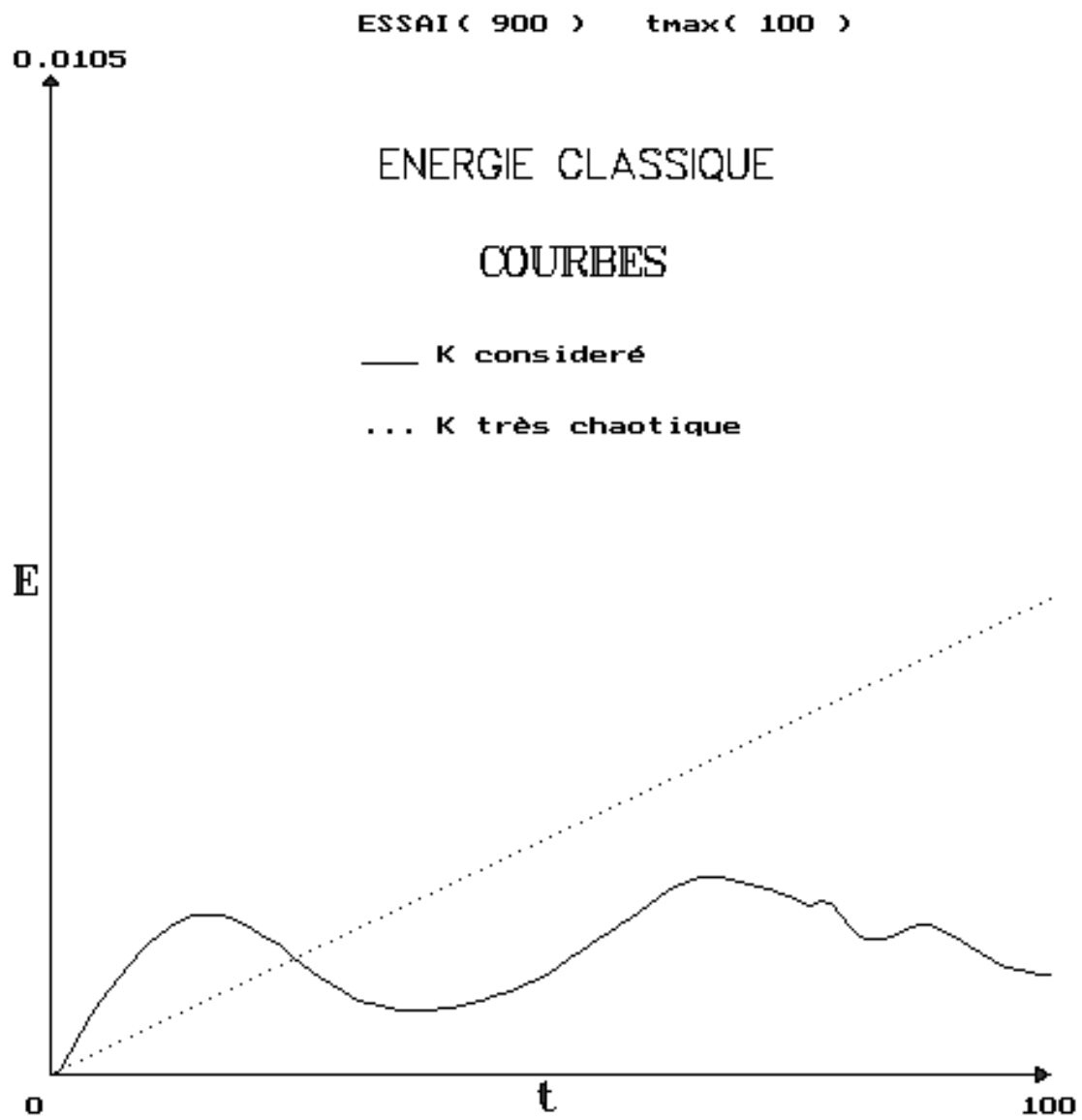


FIG.24-Variation de l'énergie en fonction du temps discrétisé pour  $K = 0.01$ . On remarque que l'on obtient pas un comportement de type diffusion.

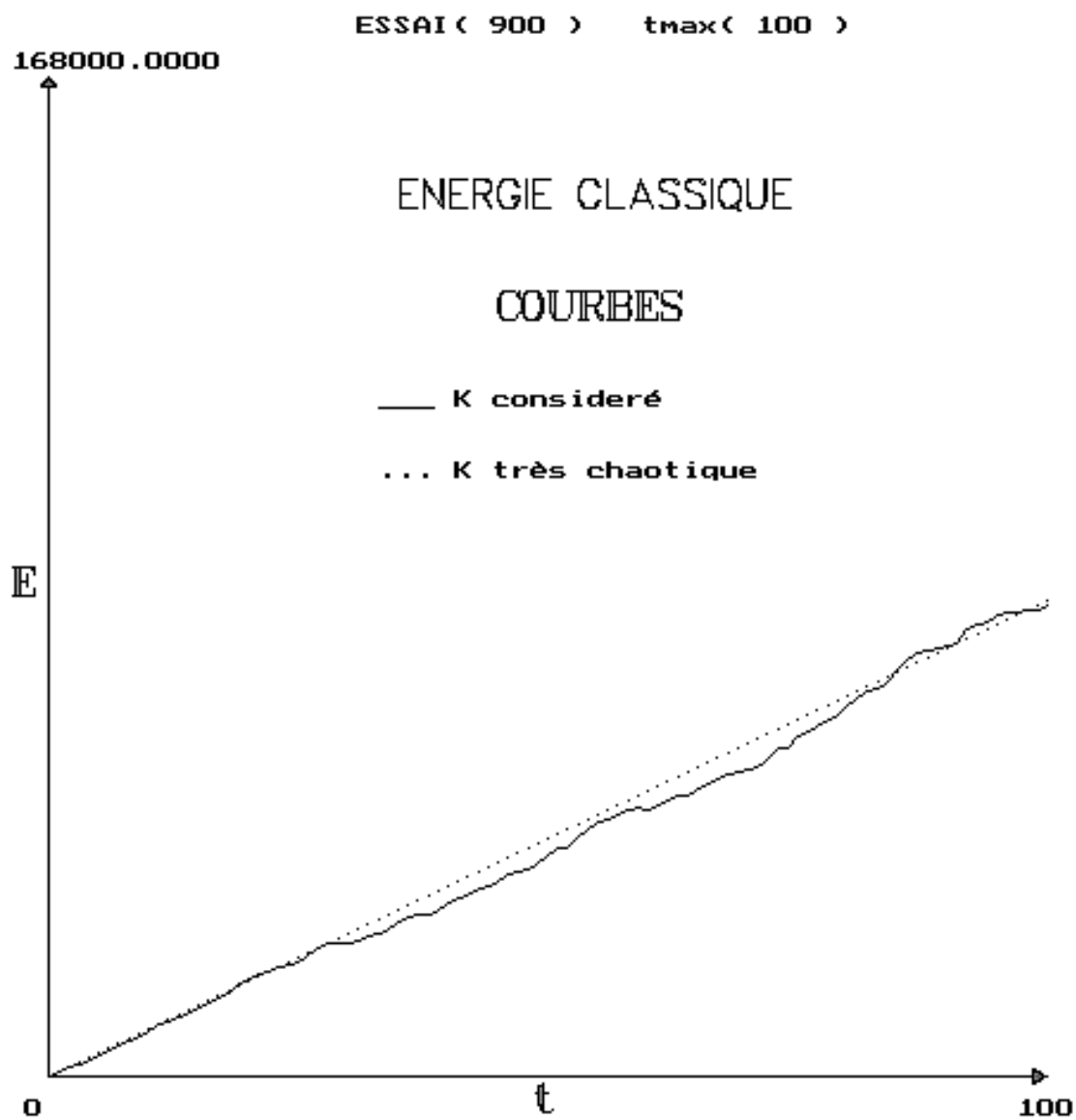


FIG.25-Variation de l'énergie en fonction du temps discrétisé pour  $K = 40$ . Ici on obtient un comportement de type diffusion, la courbe obtenue varie linéairement avec le temps et se rapproche de la courbe théorique  $E = Dn$ .

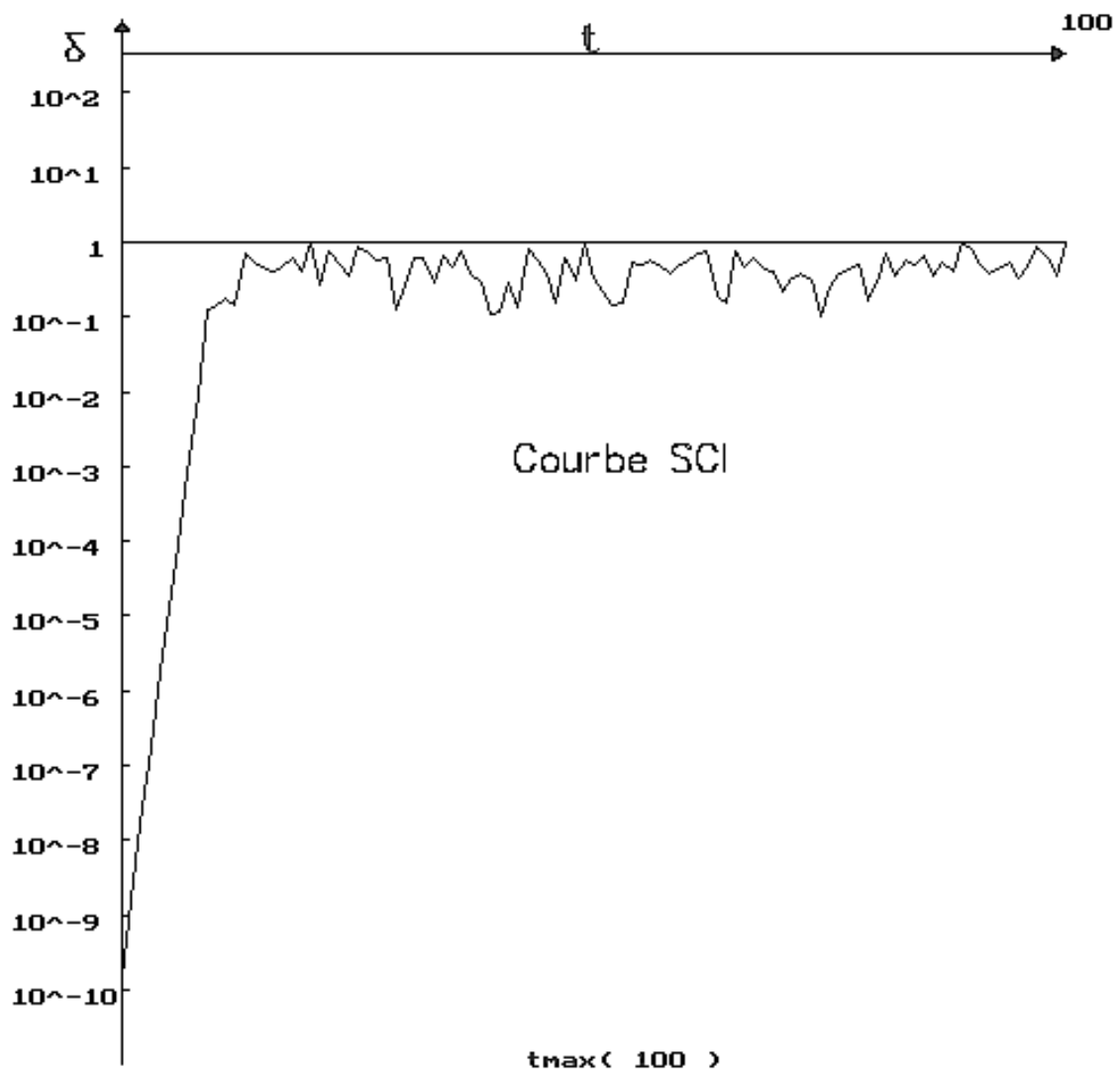


FIG.26- Représentation de l'évolution d'un écart  $\delta$  entre deux C.I infiniment proches et se situant autour d'un point fixe elliptique  $(1/2, 0)$  existant pour  $K$  faible (on reviendra ultérieurement sur ce calcul). Cette courbe aux SCI (semblable à la figure 9) a été tracée pour une valeur de  $K = 4 * \pi$ , cela montre de toute évidence la disparition des îlots de stabilité autour du point elliptique quand  $K$  augmente. La pente de la courbe nous donne le plus grand exposant de Lyapunov (le logiciel CHAOS peut effectuer le calcul).

### 1.3 Description Numérique

- **L'espace des phases**

On utilise les équations (17) sur lesquelles on effectue des boucles de calculs sur le temps pour diverses conditions initiales. Exemple, on possède un couple de points  $q_0, p_0$ , par une première itération des équations (17) on obtient  $q_1, p_1$ , puis par une seconde itération  $q_2, p_2$  etc... finalement on arrive à  $q_{tmax}, p_{tmax}$ .  $tmax$  est le nombre d'itérations maximum que l'on souhaite effectuer sur notre condition initiale  $q_0, p_0$ . Nous définissons ainsi la trajectoire dans l'espace des phases du point  $q_0, p_0$ . Afin de constituer un ensemble de trajectoires, on répétera ce processus pour diverses conditions initiales  $q_0, p_0$ . La figure 22 a pour paramètres  $tmax = 200$  et nombre de C.I= 441.

- **L'énergie classique**

On se sert une fois de plus des équations (17) mais sans imposer un modulo. En fait, on travaille sur  $\mathbf{R}^2$  car on souhaite voir apparaître un mouvement de diffusion. Sur les figures 24 et 25, le nombre d'essai correspond aux diverses C.I considérées, et  $tmax$  aux nombres d'itérations effectuer sur (17). La procédure de calcul de l'énergie cinétique moyenne,  $\langle p_n^2 \rangle$ , est la suivante :

<i>C.I</i>	<i>tmax itérations</i>			
$q_{01}$	$q_{11}$	$q_{21}$	.....	$q_{tmax1}$
$p_{01}$	$p_{11}$	$p_{21}$	.....	$p_{tmax1}$
$q_{02}$	$q_{12}$	$q_{22}$	.....	$q_{tmax2}$
$p_{02}$	$p_{12}$	$p_{22}$	.....	$p_{tmax2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$q_{0essai}$	$q_{1essai}$	.....	.....	$q_{tmax.essai}$
$p_{0essai}$	$p_{1essai}$	.....	.....	$p_{tmax.essai}$

On posera ensuite ( $n$  variant de 0 à  $tmax$ ) :

$$E_n = \langle p_n^2 \rangle = \frac{(p_{n1} - p_{01})^2 + (p_{n2} - p_{02})^2 + \dots + (p_{n.essai} - p_{0essai})^2}{essai}$$

- **La SCI**

On n'aura plus que deux C.I à considérer. En étudiant leur évolution simultanée au cours du temps (grâce aux équations (17) avec modulo sur  $q$  et  $p$ ), on définira  $\delta$  comme étant l'écart les séparant dans l'espace des phases. Ainsi, nous pourrons étudier l'évolution de cet écart et en déduire le phénomène de SCI. Comme le montre la figure 26 on travaille avec une échelle semi-logarithmique.

- **Remarque**

Les figures 22-23-24-25-26 ont été réalisées avec l'aide du logiciel CHAOS.



## 1.4 Calculs des Points Fixes

### • Points fixes de période 1

On définit la fonction  $f(q, p) = (q + p + K_1 \sin(2\pi q), p + K_1 \sin(2\pi q))$  modulo 1 sur ses deux variables  $q, p$ . Soit pour le calcul des points fixes de période 1 :

$$(q, p) = f(q, p) \longrightarrow \begin{cases} q = q + p + K_1 \sin(2\pi q) \\ p = p + K_1 \sin(2\pi q) \end{cases} \quad \begin{cases} p = -K_1 \sin(2\pi q) & (a) \\ 0 = K_1 \sin(2\pi q) & (b) \end{cases}$$

$$(b) \implies 2\pi q = n\pi \Rightarrow q = \frac{n}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{modulo } [1].$$

ainsi  $(a) \implies p = 0$

d'où on obtient deux familles de points fixes  $(0, 0)$  et  $(1/2, 0)$  (voir FIG-22).

### • Points fixes de période 2

$$(q, p) = (f \circ f)(q, p)$$

Les calculs nous donnent deux types de solutions :

$$1. \quad \begin{aligned} q &= \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{l}{K_1}\right) \quad \text{modulo } 1 \text{ si } |l| \leq |K_1| \text{ avec } l \in \mathbf{Z} \\ p &= \frac{1}{2} - l \quad \text{modulo } 1 \end{aligned}$$

Si  $0 < K_1 < 1$  donc si  $0 < K < 2\pi$ , on a  $l = 0$  et on en déduit deux points fixes  $(0, 1/2)$  et  $(1/2, 1/2)$  (voir FIG-22).

$$2. \quad \begin{aligned} p &= 2q \quad \text{modulo } 1 \\ 4q + K_1 \sin(2\pi q) &= 0 \quad \text{modulo } 1 \end{aligned}$$

Cette dernière équation est implicite et nécessite une résolution graphique<sup>18</sup>. Ainsi, nous verrons apparaître de nouveaux points fixes avec une discussion sur les  $K_1$ .

## 1.5 Stabilité des Points

### • Notions de Stabilité

Supposons un système dynamique linéarisé qui se met sous la forme :

$$\dot{X} = LX$$

D'une façon générale l'étude des valeurs propres de la matrice  $L$  au point fixe considéré<sup>19</sup>, nous renseigne sur la stabilité du système non linéarisé autour de ces points.

<sup>18</sup>Résolution qui ne sera pas traitée ici, car sans incidence pour la suite

<sup>19</sup>Un point fixe étant un point annulant le champ de vecteurs.

Mais si nous sommes en présence d'un système à coefficients périodiques, plus exactement si  $L = L(t)$  avec  $L(t+T) = L(t)$ , alors le problème de la stabilité des points considérés reste entier. Il est dans ce cas plus judicieux de travailler avec la matrice de transition  $A$ , dite matrice de Floquet. Cette matrice nous permet de calculer l'application du flot pendant un temps  $T$  (voir FIG-27). On obtient :

$$X_t = A^T X_0$$

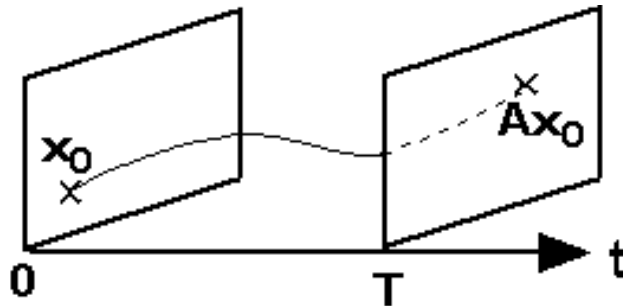


FIG.27-Application de  $A$  en une période sur l'espace des phases.

**Théorème** (de Liouville) :

$$\begin{cases} \dot{X} = L(t)X \\ Tr(L) = 0 \\ X_t = A^T X_0 \end{cases} \iff \det(A^T) = 1$$

D'où c'est une conséquence directe de la conservation des aires dans l'espace des phases, on est en présence d'un flot Hamiltonien<sup>20</sup>.

**Théorème** : Supposons une matrice  $A$  associée à une application linéaire, laissant invariante les aires, d'un plan sur lui-même ( $\det(A) = 1$ ). Alors l'application  $A$  est stable si  $|Tr(A)| < 2$  et instable si  $|Tr(A)| > 2$ .

*Démonstration* : Soit  $A$  de dimension 2 et possédant deux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$ . Ces deux valeurs propres vérifient l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda S + P = 0$$

avec  $S = \lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A)$  et  $P = \lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = 1$ .

On obtient :

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$$

<sup>20</sup>Attention cela ne rend pas pour autant impossible l'instabilité du système

$$\begin{cases} \text{Si } \Delta > 0 & \text{on aura des racines réelles et } |Tr(A)| > 2 \\ \text{Si } \Delta < 0 & \text{on aura des racines complexes conjuguées et } |Tr(A)| < 2 \\ \text{Si } \Delta = 0 & \text{on aura } \lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1 \text{ et } |Tr(A)| = 2 \end{cases}$$

Pour  $|Tr(A)| > 2$ , l'une des valeurs propres est inférieure à 1, l'autre est supérieure à 1. L'application  $A$  est une rotation hyperbolique, elle est donc instable.

Pour  $|Tr(A)| < 2$ , les valeurs propres se trouvent sur le cercle unité complexe. L'application  $A$  est équivalente à une rotation d'angle  $\alpha$  avec  $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\alpha)$ , elle donc stable.

$|Tr(A)| = 2$  étant le seuil de stabilité.

**En résumé :** le problème de stabilité se ramène à un calcul de la trace de  $A$ .

### • Applications au Rotateur Pulsé

On va examiner l'évolution infinitésimale  $dM$  d'un point  $M(q, p)$  se situant dans l'espace des phases.

Soit  $M' = M + dM$ , on pose  $M_n = f^n(M)$  et il nous calculer  $f^n(M')$ . Avec un développement de Taylor autour de  $M$  on obtient :

$$f^n(M + dM) = f^n(M) + Df^n(M)dM + \epsilon(dM^2)$$

cela entraîne

$$dM_n = Df^n(M)dM \tag{18}$$

La variation infinitésimale varie de façon linéaire.

Dans le cas particulier où  $n = 1$ ,  $Df(M)$  représente la matrice Jacobienne du système (17) (avec les équations modulo 1). On notera cette matrice Jacobienne  $A$ , son expression est :

$$A = Df(q, p) = \begin{pmatrix} 1 + 2K_1\pi \cos(2\pi q) & 1 \\ 2K_1\pi \cos(2\pi q) & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice  $A$  est aussi une matrice de Floquet, elle permet de calculer l'évolution d'un point  $M$  au bout d'une itération ( $n = 1$ ). On remarque, par ailleurs, que  $\det(A) = 1$ , ce qui a pour conséquences la conservation des aires et l'application possible des théorèmes définis précédemment.

Si  $M$  est un point fixe de  $f$  de période 1, on a alors  $Df^n(M) = (Df(M))^n = A^n$  ( $n$  n'est plus le même indice qu'auparavant, ici c'est le nombre d'itérations).

*Démonstration :* avec la relation  $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x)$

on peut écrire  $(f^n)'(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f \circ f)'(x) = f'(f^{n-1}(x))f'(f^{n-2}(x)) \dots f'(x)$

donc  $Df^n(q, p) = Df(f^{n-1}(q, p))Df(f^{n-2}(q, p)) \dots Df(q, p) = (Df(q, p))^n$

L'équation (18), dans ce cas, peut s'écrire :

$$dM_n = A^n dM$$

- **Points Fixes de Période 1**

On examine la trace de la matrice  $A$  pour les différents points considérés, avec  $Tr(A) = 2 + 2K_1\pi \cos(2\pi q)$ .

Soit  $(q, p) = (0, 0)$  on a  $Tr(A) = 2(1 + K_1\pi)$ , on remarque que  $Tr(A)$  est toujours supérieure à 2 ( $K_1$  positif), d'où on a instabilité en  $(0, 0)$ . Le point  $(0, 0)$  est un point hyperbolique<sup>21</sup> comme peut le montrer la figure 22.

Soit  $(q, p) = (1/2, 0)$  on a  $Tr(A) = 2(1 - K_1\pi)$ , ici le point est instable si  $K_1 > 2/\pi$ , ou si  $K > 4$ . Le point  $(1/2, 0)$  est donc elliptique pour  $K < 4$  (voir FIG-22 et 23), passer cette limite les îlots de stabilité disparaissent.

- **Preuve Numérique de l'apparition de l'instabilité autour de  $(1/2, 0)$**

On va se pencher sur l'étude de la SCI autour du point  $(1/2, 0)$ . On sait que la SCI est synonyme de chaos (ou d'instabilité). Il serait intéressant d'avoir une preuve numérique de ce qui a été démontré plus haut, à savoir une transition vers le chaos dans la zone du point fixe  $(1/2, 0)$  dès que  $K$  franchit la valeur 4. Cette preuve est donnée par les figures 28a-28b-28c. Il serait tout aussi intéressant de comparer la SCI autour des deux points fixes de période 1 (point elliptique et point hyperbolique) pour des valeurs de  $K$  faibles (voir FIG-29a-29b).

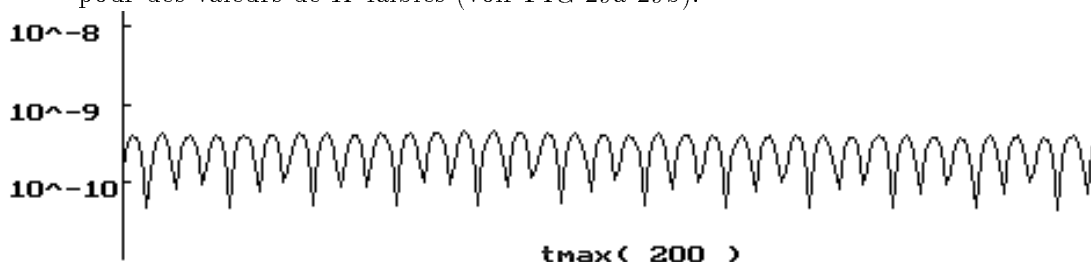


FIG.28a-Évolution d'un écart  $\delta$  de deux C.I. proche de  $(1/2, 0)$ , en fonction du temps (courbe SCI) pour  $K = 3.7$ . On remarque que le point de nature elliptique n'engendre pas la SCI.



FIG.28b-Évolution d'un écart  $\delta$  de deux C.I. proche de  $(1/2, 0)$ , en fonction du temps (courbe SCI) pour  $K = 4$ . Cette valeur particulière de  $K$  représente le seuil de stabilité pour le point.

<sup>21</sup>Il est important de signaler que l'hyperbolicité est la source de tous les problèmes puisque lorsque l'on inverse le temps il y a échange de stabilité.

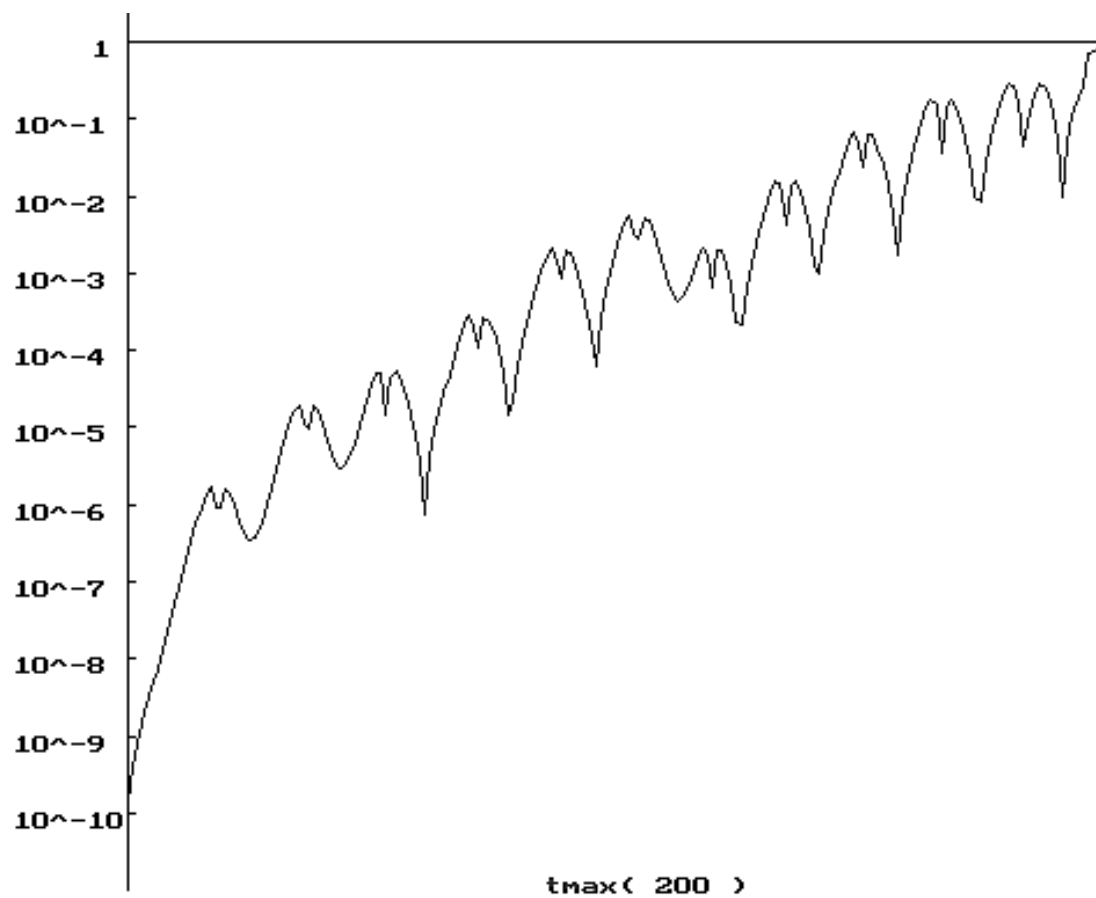


FIG.28c-Évolution d'un écart  $\delta$  de deux C.I, proche de  $(1/2, 0)$ , en fonction du temps (courbe SCI) pour  $K = 4.3$ . Le point  $(1/2, 0)$  est maintenant instable d'où apparition de la SCI, on a bien une croissance exponentielle (pour des valeurs de  $K$  plus importantes voir FIG-26).



FIG.29a-Évolution d'un écart  $\delta$  de deux C.I, proche de  $(1/2, 0)$ , en fonction du temps (courbe SCI) pour  $K = 0.6$ . La SCI ne se manifeste pas (situation identique à la figure 28-a).

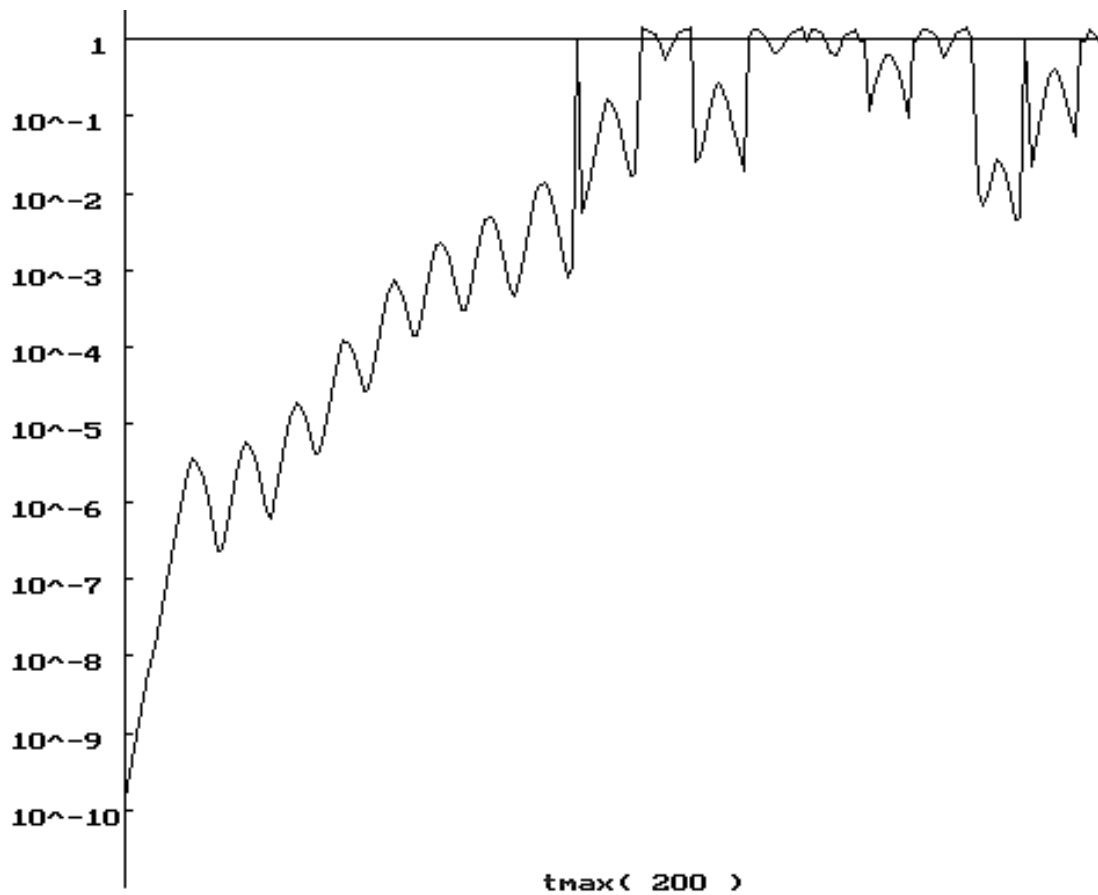


FIG.29b-Évolution d'un écart  $\delta$  de deux C.I, proche de  $(0, 0)$ , en fonction du temps (courbe SCI) pour  $K = 0.6$ . La SCI existe autour de ce point hyperbolique contrairement à la figure 29-a.

**Remarques :** Les figures précédentes ont été réalisées à l'aide du logiciel CHAOS. Celui-ci nous permettra d'obtenir toutes les courbes SCI désirées, ainsi que le portrait de l'espace des phases et la diffusion de l'énergie. On pourra ainsi faire une étude pour un  $K$  donné avec tous les renseignements utiles sur l'évolution du système.

- **Points Fixes de Période  $n$  avec  $n > 1$**

On a donc  $M = f^n(M)$ , mais cette fois-ci  $Df^n(M) \neq Df(M)^n$ . On va donc reprendre l'étude de (18) et la préciser.

On pose que  $Df^n(M) = Df(M_{n-1})Df(M_{n-2})\dots Df(M_1)Df(M)$  (caractéristique de la matrice de Floquet qui nous faudrait justifier), si on itère (18) un nombre de fois multiple de  $n$ , on aura :

$$Df^{ln}(M) = Df^n(M)^l$$

car  $M$  est un point fixe de  $f^n$ .

Exemple : calcul de la matrice de Floquet pour les points fixes de période 2 que sont  $(0, 1/2)$  et  $(1/2, 1/2)$  :

$$Df^2(M) = \begin{pmatrix} 1 + 2K_1\pi & 1 \\ 2K_1\pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2K_1\pi & 1 \\ -2K_1\pi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4\pi^2 K_1^2 - 2K_1\pi & 2 + 2K_1\pi \\ 2K_1\pi - 4\pi^2 K_1^2 & 1 + 2K_1\pi \end{pmatrix}$$

D'où le calcul de la trace nous donne  $Tr(Df^2(M)) = 2 - 4\pi^2 K_1^2$ , on aura donc un point elliptique pour  $K_1 < 1/\pi$  ou  $K < 2$ . On remarque que sur la figure 22 où  $K = 0.7$ , les points fixes considérés sont bien elliptiques, et sur la figure 23 où  $K = 3$  l'instabilité s'est manifestée, les points sont devenus hyperboliques. Un regard sur la SCI autour de ces points conclurait au même résultat. La figure 30 dresse le portrait de phases dans la zone de transition,  $K = 2$ .

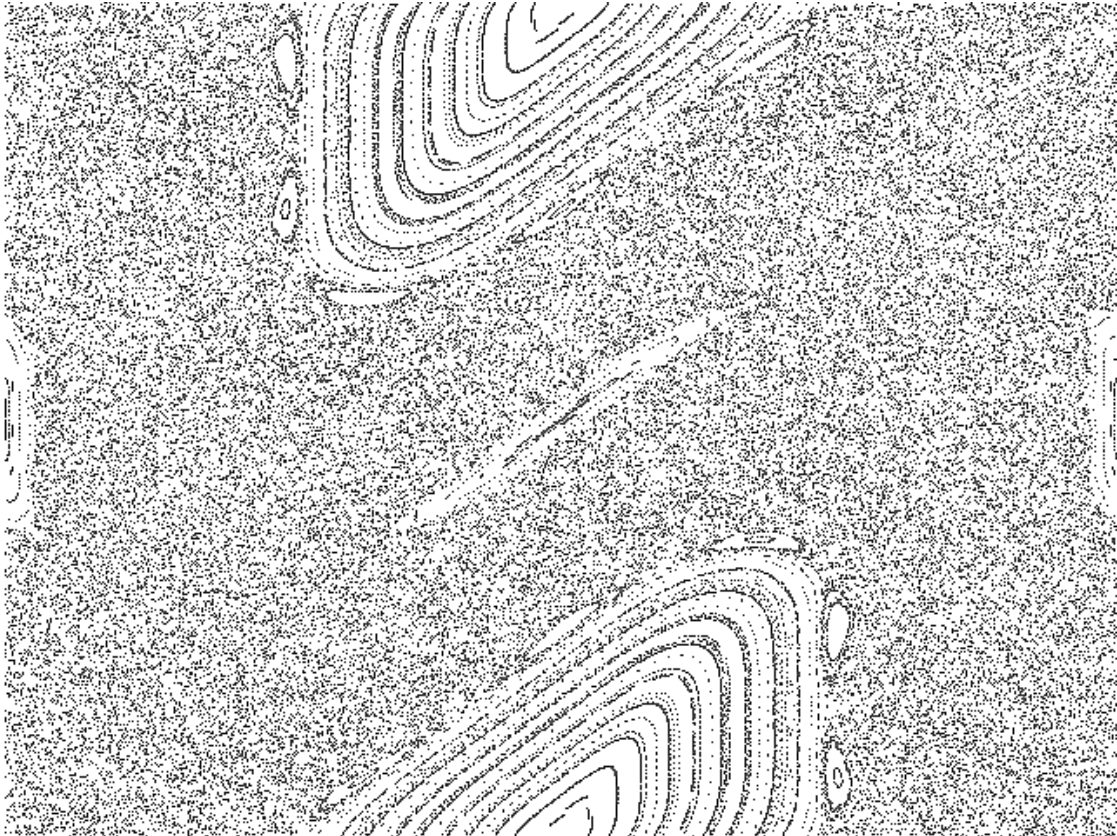


FIG.30-Portrait de phases  $q, p$  (modulo 1) de l'application standard pour  $K = 2$ .

## 2 Le Rotateur Pulsé Quantique

### 2.1 Quantification du Modèle Standard

Les variables  $p_\theta$  et  $\theta$  de l'Hamiltonien (14) doivent être transformées en opérateurs. D'où si on considère les variables  $q, p$ , on obtiendra les opérateurs  $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$ . Ces deux opérateurs ne commutent plus, contrairement aux variables du cas classique,  $[\hat{Q}, \hat{P}] \neq 0$ . Avec ces conditions (14) peut s'écrire :

$$\mathcal{H}(\hat{Q}, \hat{p}_\theta, t) = \frac{\hat{p}_\theta^2}{2ml^2} - k \cos(\hat{Q}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - \frac{t}{T}) \quad (19)$$

avec  $k = ml^2\omega_0^2$ .

Le problème va donc se résumer en l'étude de la fonction d'onde  $\psi$  du système. L'évolution de  $\psi$  est donnée par :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \quad (20)$$

Et l'on obtiendra les valeurs propres de cet Hamiltonien, donc les différentes énergies associées aux vecteurs propres  $\psi$ , par l'équation :

$$\mathcal{H}\psi = E\psi$$

Remarque : l'énergie est un paramètre pertinent qui nous permettra de comparer résultats classique et quantique.

Il est cependant préférable de travailler avec l'opérateur d'évolution  $F$  de la fonction d'onde pendant une période  $T$ , car l'équation (20) est singulière à cause du Dirac de l'Hamiltonien. Pour remédier à ce problème on régularise le Dirac<sup>22</sup> et on obtient l'expression de l'opérateur d'évolution :

$$F_T = \exp(-i \frac{\hat{p}_\theta^2 T}{2\hbar ml^2}) \exp(-i \frac{k \cos(\hat{Q}) T}{\hbar})$$

On sait que  $K = w_0^2 T^2$ , en posant  $\gamma = \hbar T / ml^2$  et  $\hat{P} = \hat{p}_\theta T / ml^2$  on arrive finalement à l'expression suivante :

$$F_T = \exp(-i \frac{\hat{P}^2}{2\gamma}) \exp(-i \frac{K \cos(\hat{Q})}{\gamma}) \quad (21)$$

Cet opérateur appliqué sur  $\psi$  a pour conséquence :

$$\psi_t \longrightarrow \psi_{t+T}$$

$F$  est appelé tout naturellement opérateur de Floquet. Les variables  $K$  et  $\gamma$  sont sans dimension.  $K$  est un paramètre qui nous permet de faire l'analogie classique-quantique,

<sup>22</sup>Calcul laborieux qui ne sera pas développé dans cette étude.



$\gamma$  aura des conséquences sur le comportement de l'énergie quantique. C'est cette énergie qui nous faut maintenant évaluer.

**Remarques importantes :**

1. En représentation  $Q$ , les opérateurs de positions et d'impulsions s'écrivent :
 
$$\hat{Q} = \text{multiplication par } q$$

$$\hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$$
2. De plus, comme  $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$  ne commutent plus, pour passer de la représentation  $Q$  à la représentation  $P$ , on effectue une transformée de Fourier  $TF$  (pour passer de  $P$  à  $Q$  on effectue une  $TF^{-1}$ ).
3. Il est important de signaler que  $F$  dépend à la fois de l'impulsion et de la position, d'où pour le calcul de l'évolution de la fonction d'onde  $\psi$  nécessite un algorithme de transformée de Fourier rapide.
4. le paramètre  $\gamma$  a un sens physique, on a  $\gamma = 4\pi\alpha$  où  $\alpha$  est le rapport entre deux fréquences, la fréquence propre du rotateur quantique libre sur la fréquence extérieure des coups.

## 2.2 L'Énergie Quantique

Le calcul de l'énergie classique (énergie cinétique) ne présentait aucune difficulté, mais le calcul de l'énergie quantique est plus délicat. Avant d'introduire la notion d'énergie quantique, nous allons analyser l'effet de l'opérateur de Floquet sur la fonction d'onde initiale  $\psi_0$  (en représentation  $Q$ , notée  $\psi_0(q)$ ), soit :

$$\exp(-i\frac{\hat{P}^2}{2\gamma}) \exp(-i\frac{K \cos(\hat{Q})}{\gamma}) \psi_0(q)$$

On cherche à obtenir la fonction  $\psi_1(q)$ . On va procéder par étape :

1. On peut effectuer l'opération  $\exp(-iK \cos(\hat{Q})/\gamma) \psi_0(q)$  car on se trouve en représentation  $Q$ ,  $\hat{Q}$  devient  $q$ . On obtient une valeur qu'on note  $\psi(q)$ .
2. Pour effectuer la seconde multiplication donc avec  $\exp(-i\hat{P}^2/2\gamma)$ , on doit se trouver en représentation  $P$ , on va donc transformer  $\psi(q)$  en  $\psi(p)$  à l'aide d'une  $TF$ . En représentation  $P$ ,  $\hat{P}$  s'écrit  $p$ .
3. On pose  $\psi_1(p) = \exp(-ip^2/2\gamma)\psi(p)$ .
4. Dernière étape, on se ramène en représentation  $Q$  en effectuant une  $TF^{-1}$  sur  $\psi_1(p)$ . On trouve alors  $\psi_1(q)$  et notre algorithme est terminé.

Afin de calculer les  $\psi_n(q)$  successifs,  $n$  entier, on réitère ces étapes ( on remarque que l'on obtient par la même occasion les  $\psi_n(p)$ ). Les transformées de Fourier qui interviennent dans ce calcul sont des transformées de Fourier rapides (FFT).

La valeur de l'énergie cinétique quantique, pour une valeur du temps discret  $n$ , est donnée par l'expression suivante :

$$E_c(n) = \frac{\langle \psi_n(p) | p^2 | \psi_n(p) \rangle}{\langle \psi_n(p) | \psi_n(p) \rangle} \quad (22)$$

L'énergie devra être calculée, comme pour le cas classique, pour différentes conditions initiales (les conditions initiales sont les vecteurs  $q$  et  $p$ ), ensuite il nous suffira de faire la moyenne de ces énergies trouvées sur un même temps.

### 2.3 Description Numérique, La FFT

La transformée de Fourier rapide joue un rôle cruciale dans le calcul de notre énergie quantique. C'est pourquoi, il est intéressant d'analyser cette méthode de calcul et d'en donner l'algorithme.

Au début on possède  $N$  variables  $x_n$ , on connaît la définition de la transformée de Fourier discrète, soit :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}$$

avec

$$W_N = \exp i \frac{2\pi}{N}$$

Remarque : la  $TF^{-1}$  s'écrit  $x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk}$ .

Si on réalise le calcul de cette transformée de Fourier, le nombre de multiplication à effectuer s'élève à  $N^2$ . Danielson et Lanczos proposèrent, en 1942, de réduire ce nombre à  $N \log_2 N$  en décomposant la transformée de Fourier discrète (DFT) en une somme de deux DFT et ainsi de suite ( $N$  doit satisfaire la relation  $N = 2^p$ ). Ce faisant, on crée un algorithme de transformées de Fourier rapides (FFT), dont le principal intérêt est de réduire considérablement le temps de calcul des opérations. La preuve théorique des décompositions successives des DFT ne posant aucune difficulté, nous allons nous pencher sur la réalisation pratique de l'algorithme de la FFT qui comprend 4 grandes étapes (on considère les valeurs de départ réels, car pour des  $x_n$  complexes il suffira de considérer la suite partie réelle et la suite partie imaginaire).

1. On réalise « une inversion binaire » sur les valeurs  $x_n$  initiales,  $n$  variant de 0 à  $N - 1$ . En d'autres termes, on écrit ces valeurs initiales dans un nouvel ordre. Pour cela, on regarde le nombre  $n$ , indice des  $x$ , puis on l'écrit sous forme binaire<sup>23</sup>. On obtient ainsi une nouvelle suite de nombre que l'on nomme  $x'_n$ .

<sup>23</sup>Attention le nombre de zéros à gauche est limité par la longueur du nombre binaire  $N - 1$ .

Exemple : prenons  $N = 16$

$x_0 \rightarrow 0000$	$\Rightarrow$	$0000 \rightarrow x_0$
$x_1 \rightarrow 0001$		$1000 \rightarrow x_8$
$x_2 \rightarrow 0010$		$0100 \rightarrow x_4$
$x_3 \rightarrow 0011$		$1100 \rightarrow x_{12}$
$x_4 \rightarrow 0100$		$0010 \rightarrow x_2$
$x_5 \rightarrow 0101$		$1010 \rightarrow x_{10}$
$x_6 \rightarrow 0110$		$0110 \rightarrow x_6$
$x_7 \rightarrow 0111$		$1110 \rightarrow x_{14}$
$x_8 \rightarrow 1000$		$0001 \rightarrow x_1$
$x_9 \rightarrow 1001$		$1001 \rightarrow x_9$
$x_{10} \rightarrow 1010$		$0101 \rightarrow x_5$
$x_{11} \rightarrow 1011$		$1101 \rightarrow x_{13}$
$x_{12} \rightarrow 1100$		$0011 \rightarrow x_3$
$x_{13} \rightarrow 1101$		$1011 \rightarrow x_{11}$
$x_{14} \rightarrow 1110$		$0111 \rightarrow x_7$
$x_{15} \rightarrow 1111$		$1111 \rightarrow x_{15}$

2. On va calculer ce que l'on nomme le premier étage.

Soit pour un  $i$  fixé, variant de 0 à  $N - 1$ , on obtient une nouvelle suite  $u_i$  définie par :

$$\begin{cases} u_i = x'_i + x'_{i+1} \\ u_{i+1} = x'_i - x'_{i+1} \end{cases}$$

Exemple :  $N = 16$ , les premières étapes de calculs sont :

$$\begin{array}{ccc} x_0 & & x_0 + x_8 \\ & \Rightarrow & \\ x_8 & & x_0 - x_8 \\ & & \\ x_4 & & x_4 + x_{12} \\ & \Rightarrow & \\ x_{12} & & x_4 - x_{12} \\ & & \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

3. Maintenant la procédure de calcul du deuxième étage.

Soit on définit pour  $i$  pair (ici 0 est un nombre pair) :

$$\begin{cases} u'_i = u_i + u_{i+2} \\ u'_{i+2} = u_i - u_{i+2} \end{cases}$$

Et pour  $i$  impair :

$$\begin{cases} u'_i = u_i + W_4^1 u_{i+2} \\ u'_{i+2} = u_i - W_4^1 u_{i+2} \end{cases}$$

Remarque : Dans la suite des nombres obtenues,  $u'_n$ , des nombres complexes apparaissent.

4. Ici on calculera tous les étages suivants.

Soit pour  $i$  pair :

$$\begin{cases} U_i = u'_i + u'_{i+2} \\ U_{i+T} = u'_i - u'_{i+T} \end{cases}$$

Et pour  $i$  impair :

$$\begin{cases} U_i = u'_i + W_N^1 u'_{i+T} \\ U_{i+T} = u'_i - W_N^1 u'_{i+T} \end{cases}$$

On effectuera le calcul de cet étage avec une boucle sur  $T$ .  $T$  variant de 4 à  $N/2$  et multiplié par 2 à chaque itération.

Finalement, la suite des nombres obtenues sera la suite des  $X_k$ ,  $k$  allant de 0 à  $N-1$ . Cette suite est donc la transformée de Fourier des  $x_n$ .

## 2.4 Différence Classique-Quantique

On va revenir sur l'équation (22), c'est-à-dire sur l'énergie quantique. On va considérer un  $K$  grand<sup>24</sup> synonyme de chaos total pour le modèle classique. On remarque que la diffusion de l'énergie qui au départ semblait coïncider avec la courbe classique  $E = Dn$ , finit par se stabiliser !. Elle sature au delà d'un temps  $\tau$ , temps de rupture (voir FIG-31).

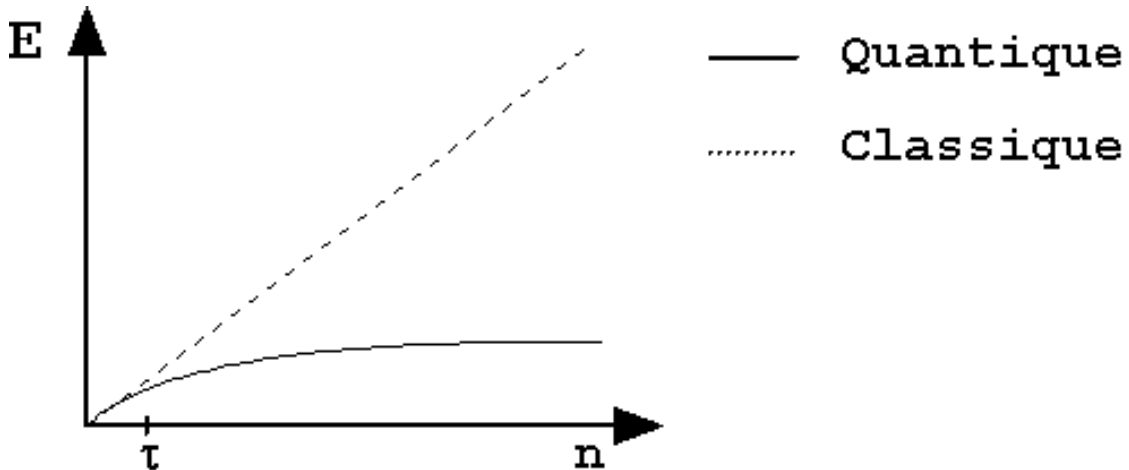


FIG.31-Comparaison schématique des énergies du rotateur classique et quantique pour des valeurs de  $K$  grandes.

<sup>24</sup>On considère aussi  $\alpha$  nombre irrationnel dans  $\gamma = 4\pi\alpha$ .

**Remarque :** Quand  $\gamma$  tend vers 0, la courbe quantique de la figure 31 se rapproche peu à peu de la courbe classique.

On est donc en droit de se poser la question suivante, le chaos existe-t-il en mécanique quantique ?

En fait, l'énergie est un mauvais paramètre pour déterminer le chaos en mécanique quantique. Nous allons donc chercher à caractériser ce chaos, car il y a chaos.

**Remarque :** si l'énergie se stabilise, cela correspond à une localisation de la fonction d'onde dans l'espace des moments. On peut ainsi faire des approximations et on a une analogie avec la physique du solide (localisation d'Anderson). On nomme la longueur de corrélation  $\xi$ , Shepelyansky-Chirikov-Izraïlev ont montré, en 1980, un lien entre cette longueur de corrélation et la constante de diffusion classique  $D$ , à savoir :

$$\xi = \frac{D}{2\hbar^2}$$

## 2.5 Caractérisation du Chaos Quantique

Il existe à l'heure actuelle trois grandes manières de conclure à un chaos quantique <sup>25</sup>.

- **La Localisation Dynamique**

On travaille en formalisme d'opérateurs, on étudie les propriétés spectrales.

- **La Limite Semi-Classique**

On fait tendre  $\hbar$  vers 0. On travaille avec un formalisme d'intégrales de chemin.

- **Théorie des Matrices Aléatoires**

C'est une règle phénoménologique basée sur une statistique des écarts de niveaux et qui s'applique très bien au cas du rotateur pulsé. Généralement on diagonalise l'Hamiltonien quantique afin d'obtenir les valeurs propres du système. Dans notre cas les valeurs propres sont directement données par l'équation (22).

Il nous faut faire une statistique des écarts de niveaux, c'est-à-dire que l'on calcule les différents  $s_i = E_{i+1} - E_i$ , puis on trace la distribution  $P(s)$  de ces écarts. On obtient trois types de courbes,  $P(s)$  peut avoir une forme GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble),  $P(s) \sim s \exp(-s^2)$ , ou une forme GUE (Gaussian Unitary Ensemble),  $P(s) \sim s^2 \exp(-s^2)$ , ou bien  $P(s)$  peut être une statistique de Poisson du type  $P(s) \sim \exp(-s)$ . Conséquences :

1. Si  $P(s)$  suit une loi de Poisson, le système est dit classiquement intégrable, donc il n'est pas chaotique, il y a répulsion des niveaux (voir FIG-32).

---

<sup>25</sup>Il n'existe pas de véritables théories, mais plutôt des conclusions basées sur des observations.

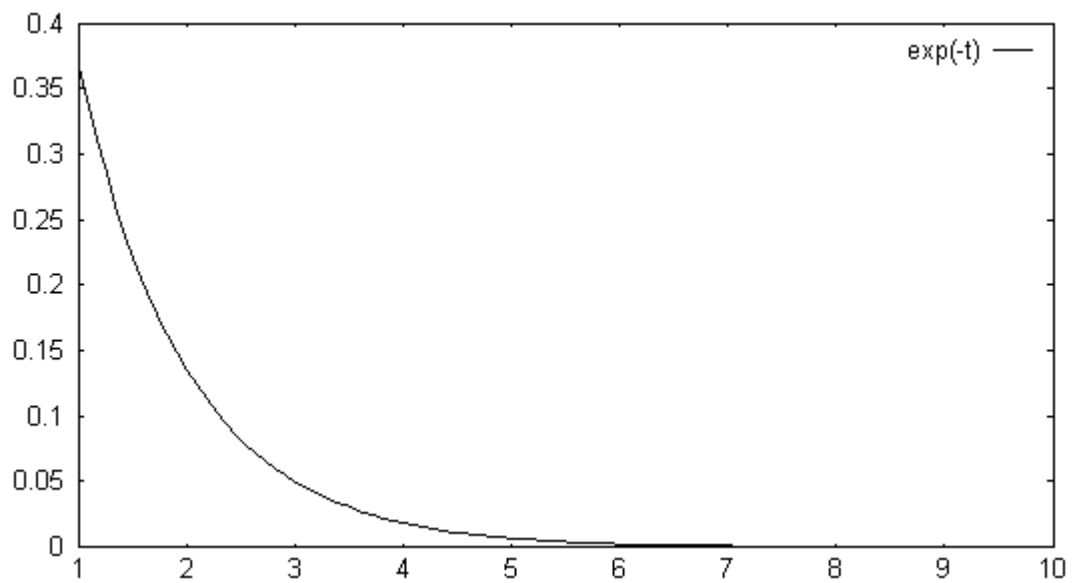


FIG.32-Distribution de poisson synonyme de système intégrable.

2. SI  $P(s)$  suit une loi du type Wigner (GOE ou GUE), alors il y a regroupement des niveaux (level clustering) et le système est chaotique (voir FIG-33).

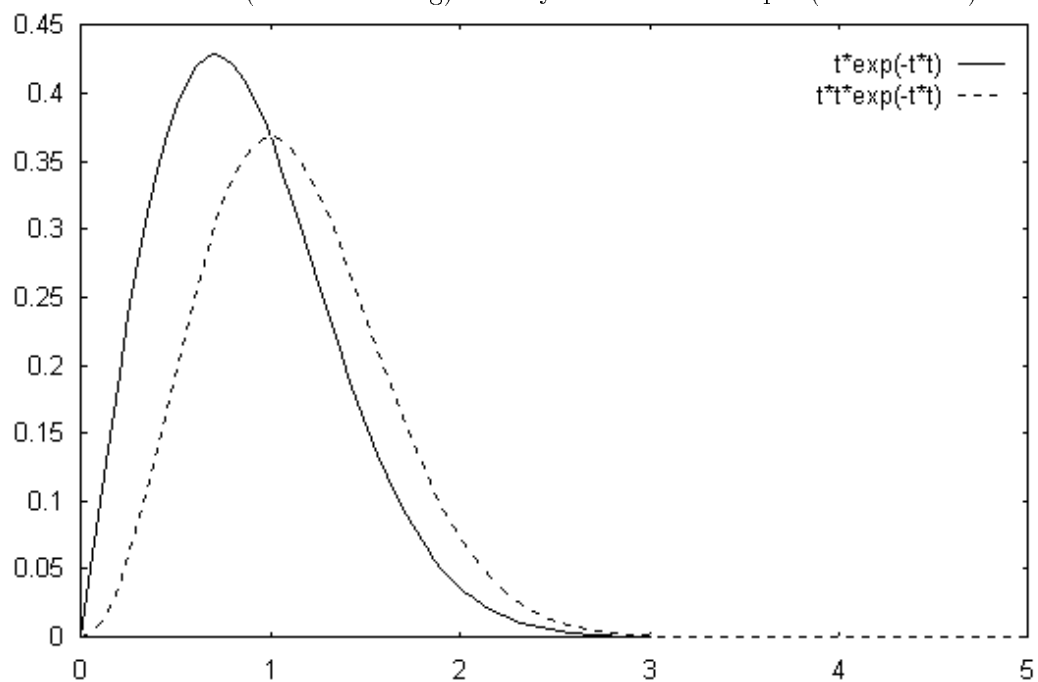


FIG.33-Distributions du type GOE (en trait plein) et GUE (en pointillé), synonymes d'une présence chaotique.

## **2.6 Conclusion**

A l'image d'une transition difficile à cerner entre une loi de poisson et une loi du type Wigner, la présence de comportements chaotiques en mécanique quantique, si elle commence tout juste à être solidement établie, n'est pas encore bien comprise.